



TESIS

Aproximaciones Mixtas en Métodos de Lagrange-Galerkin de Vecindad Natural. Aplicación a la Mecánica de Sólidos y de Fluidos

Presentada por

DAVID GONZÁLEZ IBÁÑEZ

Licenciado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Dirigida por

ELÍAS CUETO PRENDES

Dr. Ingeniero Industrial
y por

MANUEL DOBLARÉ CASTELLANO

Dr. Ingeniero Industrial

Presentada en el

CENTRO POLITÉCNICO SUPERIOR DE LA
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

para la obtención del Grado de Doctor en Matemáticas.

Zaragoza, Junio de 2004

A mis padres



AGRADECIMIENTOS

Durante todos estos años de investigación he ido generando una idea: la investigación es una desagradecida. Uno puede estar mucho tiempo intentando resolver la cuadratura del círculo y es muy probable que nunca le sea reconocido el esfuerzo.

Esta tesis es el resultado de varios años de trabajo llenos de esfuerzo y ganas de aprender. Sin embargo, no hubiese servido de nada sin el apoyo y las ganas de enseñar de otros. Por ello, quiero agradecer en primer lugar, al profesor Manuel Doblare toda su confianza y apoyo puestos en mí, su más que inteligente dirección y el haber logrado formar un estupendo grupo de trabajo donde poder ejercer la investigación.

En segundo lugar, pero no con menos importancia, quiero dar las gracias al profesor Elías Cueto por su constante disponibilidad, su estupenda dirección y todo el apoyo mostrado. Pero quiero darle las gracias sobre todo por su amistad, algo que ha hecho mucho más afable el trabajo de todos estos años.

No puedo olvidarme del profesor Francisco Chinesta, que tanto ha aportado al desarrollo de esta tesis con sus originales ideas.

Gracias también a los compañeros que forman y han formado parte en estos últimos años del Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad de Zaragoza. En especial a M^a. José Gómez, Estefanía Peña, Amaya Pérez del Palomar, M^a. Ángeles Pérez, Javier Bayod, Fernando Cacho, Jorge Grasa

y José Javier Laguardia, con los que he compartido durante estos años el desarrollo de nuestras respectivas tesis doctorales. Así como a Iciar Alfaro, Begoña Calvo, Concepción Fernández, José Antonio Bea, David Bel, José Cegoñino, José Manuel García, Miguel Ángel Martínez y Luis Peiró por todo el cariño mostrado durante todo este tiempo.

Quiero dar las gracias también a todos mis amigos, por compartir conmigo esta ilusión hecha ya una realidad.

Para finalizar, no quiero olvidarme de mis padres y hermanos que tanto me han apoyado en la realización de este proyecto, y cómo no, de Mamen, quizá la que más ha sufrido el desarrollo del mismo aguantando las alegrías y las decepciones. Gracias “morena”.



ÍNDICE GENERAL

Índice General	x
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	4
1.2. Objetivos y alcance de la tesis	5
1.3. Metodología	7
1.4. Estructura de la tesis	7
2. Métodos sin malla	9
2.1. El Método de Galerkin	10
2.1.1. Definiciones preliminares	10
2.1.2. Espacios de Sobolev. Problemas variacionales	16
2.1.3. Problemas de Contorno Elípticos	18
2.1.4. Método de Galerkin	22
2.2. Solución débil del problema de valores en el contorno	24
2.3. Smoothed Particle Hydrodynamics	28
2.3.1. Construcción de la aproximación	28
2.3.2. Problemática del <i>SPH</i>	33
2.4. Método de Mínimos Cuadrados Móviles	34
2.4.1. Construcción de la aproximación	34
2.5. Método de Elementos Difusos	45

2.6.	Element Free Galerkin Method	46
2.6.1.	Problemática del método <i>EFGM</i>	47
2.7.	Reproducing Kernel Particle Method	48
2.7.1.	Construcción de la aproximación	48
2.7.2.	Problemática del método <i>RKPM</i>	50
2.8.	Método de Partición de la Unidad	50
2.8.1.	Construcción del <i>PUM</i>	54
2.8.2.	Problemática del <i>PUM</i>	54
2.9.	Método de nubes <i>h-p</i>	55
2.9.1.	Construcción del método de nubes <i>h-p</i>	55
2.10.	Método de Petrov-Galerkin local	57
2.11.	Método de Esferas Finitas	58
3.	El Método de los Elementos Naturales	63
3.1.	Interpolación por Vecinos Naturales	64
3.1.1.	Coordenadas de vecino natural	66
3.2.	Formulación débil del problema	69
3.3.	Propiedades del Método de Elementos Naturales	72
3.3.1.	Aproximación en el <i>MEN</i>	77
3.4.	Cálculo de las funciones de forma del <i>MEN</i>	82
3.4.1.	Algoritmo de Watson	82
3.4.2.	Algoritmo de Lasserre	84
3.5.	Imposición de condiciones de contorno esenciales en el <i>MEN</i>	86
3.5.1.	El <i>MEN</i> basado en formas α	88
3.5.2.	El método de elementos naturales restringido <i>C-NEM</i>	96
3.6.	Problemática del <i>MEN</i>	99
4.	Integración numérica en el método de los Elementos Naturales	101
4.1.	Integración numérica de métodos de Galerkin de vecindad natural	102
4.1.1.	Errores en la integración numérica	102
4.2.	Una aproximación basada en la descomposición del soporte para métodos de Galerkin de vecindad natural	104
4.2.1.	<i>Patch tests</i> 2D con el método de descomposición del soporte	106
4.2.2.	Conclusiones para la aproximación basada en la descomposición del soporte	108
4.3.	Integración nodal estabilizada en métodos de Galerkin de vecindad natural	108
4.3.1.	Requerimientos a la integración	109
4.3.2.	Campo de deformaciones suavizado	110
4.3.3.	Aproximación y Discretización	114
4.3.4.	Cuestiones algorítmicas	115

4.4.	Resultados numéricos	118
4.4.1.	<i>Patch tests</i> 2D con integración nodal estabilizada	118
4.4.2.	Problema de placa con agujero	120
4.4.3.	<i>Patch test</i> tridimensional	121
4.4.4.	Cilindro hueco bajo presión	123
4.5.	Conclusiones acerca de la integración numérica del <i>MEN</i>	130
5.	El <i>MEN</i> en la simulación de medios incompresibles	133
5.1.	Formulaciones no estándar y mixtas	133
5.1.1.	Problema modelo	134
5.1.2.	Formulación no estándar	134
5.1.3.	Aproximación, estabilidad y convergencia.	137
5.1.4.	Condición <i>LBB</i> . Estabilidad de los métodos mixtos.	139
5.2.	Ecuaciones de gobierno	141
5.2.1.	Aproximación de las variables del problema.	143
5.3.	Aproximaciones mixtas en métodos de Galerkin de vecindad natural	145
5.3.1.	Test numérico para la condición <i>inf-sup</i>	145
5.4.	Partición de la Unidad en métodos de Galerkin de Vecindad Natural	149
5.4.1.	El método de partición de la unidad	149
5.4.2.	Interpolantes por vecinos naturales enriquecidos	151
5.5.	Resultados Numéricos	157
5.5.1.	Test numérico para la condición <i>inf-sup</i>	157
5.5.2.	Viga sometida a flexión.	158
5.5.3.	Problema de placa con agujero	161
5.6.	Conclusiones previas acerca del comportamiento del <i>MEN</i> en la si- mulación de medios incompresibles	164
6.	Una aproximación Lagrangiana actualizada a la Dinámica de Flui- dos	165
6.1.	Descripción de la cinemática de un fluido	165
6.1.1.	Derivadas material y espacial en el tiempo	168
6.2.	Ecuaciones de gobierno de la Dinámica de Fluidos	169
6.2.1.	Ecuaciones de conservación básicas	170
6.2.2.	Tensor de tensiones en un fluido Newtoniano	172
6.2.3.	Ecuaciones de Navier-Stokes	173
6.3.	Método de las características	175
6.3.1.	El concepto de línea característica	175
6.3.2.	Propiedades de la ecuación de convección lineal	176
6.3.3.	Métodos de Lagrange-Galerkin basados en las características .	177
6.4.	Formulación débil. Uso de una técnica de Elementos Naturales y Características.	178

6.5.	Aspectos algorítmicos	179
6.6.	Resultados numéricos	181
6.6.1.	Problema de la presa rota	181
6.6.2.	Análisis de la propagación de una onda solitaria	186
6.6.3.	Simulación del movimiento de una burbuja en el seno de un fluido viscoso	189
6.7.	Conclusiones	196
7.	Conclusiones y desarrollo futuro	199
7.1.	Resumen del trabajo realizado	199
7.2.	Conclusiones	202
7.3.	Aportaciones originales	202
7.4.	Líneas de desarrollo futuro	203
A.	Nomenclatura	205
A.1.	Símbolos	205
A.2.	Operadores	209
	Bibliografía	211
	Índice alfabético	221



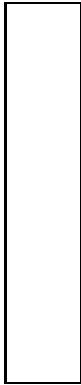
ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Recubrimiento de un dominio bidimensional Ω por las funciones de forma asociadas a cada nodo.	30
2.2. Funciones de forma (a) y sus derivadas (b) construidas con una base lineal y soporte $\alpha = 2,0$	40
2.3. Funciones de forma (a) y sus derivadas construidas con una base lineal y soporte $\alpha = 3,0$	41
2.4. Función de forma del nodo central con base cuadrática y soportes (a) $\alpha = 2,0$ y (b) $\alpha = 3,0$	42
2.5. Conjunto de funciones de forma con base cuadrática y $\alpha = 3,0$	42
2.6. Núcleo W empleado en las nubes h-p.	56
2.7. Núcleo W en 2D obtenido por producto tensorial y, por tanto, con soporte rectangular.	57
2.8. Construcción de la forma débil del problema en el método local de Petrov-Galerkin.	58
3.1. Triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos.	64
3.2. Definición de las coordenadas de vecino natural.	67
3.3. Función de forma centrada en un nodo que se encuentra rodeado de otros cuatro nodos (tomado de SUKUMAR [1998]).	68

3.4.	Definición de coordenadas no-Sibsoniana.	69
3.5.	Función de forma no-Sibsoniana (SUKUMAR ET AL. [1998])	70
3.6.	Aproximación en el elemento de referencia unidimensional.	78
3.7.	Aproximación en el caso de que un punto tenga cuatro vecinos naturales dispuestos en una red regular (SUKUMAR ET AL. [1998]).	80
3.8.	Cálculo de la función de forma mediante el algoritmo de Watson.	83
3.9.	Interpolación lineal a lo largo de un contorno convexo Γ_u	87
3.10.	Evolución de la forma α de una nube de puntos repartida por la geometría de una mandíbula. Formas \mathcal{S}_0 (a), $\mathcal{S}_{1,0}$ (b), $\mathcal{S}_{1,5}$ (c), $\mathcal{S}_{3,5}$ (d) y \mathcal{S}_∞ (e).	91
3.11.	Linealidad del interpolante en un contorno cóncavo.	93
3.12.	Efecto de la nueva definición de vecindad en el cálculo de la celda de Voronoi.	95
3.13.	Función de forma asociada a un nodo de un contorno cóncavo.	96
3.14.	(YVONNET ET AL. [2003c]) Interpretación del diagrama de Voronoi restringido. (a) Vista esquemática del <i>DVR</i> . (b) Intersección entre el <i>DVR</i> y la clausura del dominio.	97
4.1.	Soporte de la función de forma asociada con el nodo I	104
4.2.	Transformación propuesta para la integración sobre un sector circular.	105
4.3.	Resultado de la transformación de una cuadratura de Gauss de 5×5 puntos sobre un cuadrado en un segmento circular.	106
4.4.	Nube de nueve nodos para la aplicación del método de descomposición del soporte para el <i>patch test</i>	107
4.5.	Ejemplo del diagrama de Voronoi en dos dimensiones.	112
4.6.	Relación geométrica entre el $sop(\Psi_I)$ y el dominio nodal Ω_L (CHEN ET AL. [2001a]).	113
4.7.	Definición de la celda de Voronoi del nodo 1 a través del uso de circuncentros de los triángulos que contienen al nodo.	115
4.8.	Integración numérica sobre la intersección de la celda de Voronoi del nodo I y el contorno el dominio. La intersección se ha descompuesto en triángulos y se ha empleado una cuadratura de tres puntos. De nuevo, los circuncentros se representan con círculos en blanco. Todos los otros nodos salvo el nodo I se omiten por claridad.	116
4.9.	División de un cilindro hueco de la sección 4.4.4 en celdas de Voronoi. Se muestran también las facetas triangulares que definen la región no convexa del dominio.	117

4.10. Ejemplo de una celda de Voronoi cortada por el contorno.	117
4.11. Nubes de puntos considerados en la aplicación del <i>patch test</i> con integración nodal estabilizada.	119
4.12. Geometría del problema de una placa infinita con agujero sometida a tracción.	121
4.13. Norma del error L_2 en el problema de placa con agujero.	122
4.14. Nube de 8 puntos usada en la aplicación del <i>patch test</i>	123
4.15. Nube de puntos usados en la aplicación del <i>patch test</i> . Distribución irregular de la nube de 9 puntos.	124
4.16. Nube de 27 puntos usados en la aplicación del <i>patch test</i>	125
4.17. Celdas de Voronoi para la nube de 9 puntos. Para mayor claridad, se han omitido las caras de la celda pertenecientes al contorno.	126
4.18. Geometría del problema de un cilindro hueco bajo presión.	126
4.19. Nubes de puntos para el problema de un cilindro con agujero bajo presión.	127
4.20. Forma α (166 nodos) usada en la solución del cilindro con agujero bajo presión.	128
4.21. Convergencia del problema del cilindro con agujero.	128
4.22. Convergencia del problema del cilindro con agujero en norma $\ \cdot\ _2$	129
5.1. Nube de 9 nodos sobre una malla regular.	154
5.2. Representación de las funciones de forma $\phi \cdot x$ (a), $\phi \cdot y$ (b) y $\phi \cdot xy$ (c)	155
5.3. Geometría del problema usado para evaluar el test numérico de la condición <i>inf-sup</i>	157
5.4. Test numérico para la condición <i>inf-sup</i> aplicado a las aproximaciones propuestas. Siendo $N =$ (Número de nodos por lado) $- 1$	158
5.5. Geometría de la viga fija sometida a flexión.	159
5.6. Nube de puntos para la simulación de una viga sometida a flexión.	159
5.7. Geometría del problema de una placa infinita con agujero sometida a tracción uniaxial.	162
5.8. Nubes de puntos empleadas en el problema de la placa con agujero.	162
5.9. Resultados de convergencia para el problema de la placa con agujero. A la derecha, resultados con $\nu = 0,3$. a la izquierda, $\nu = 0,4999$	163
6.1. Configuración experimental del ensayo de rotura de presa. (Elaboración propia a partir de MARTIN Y MOYCE [1952])	182
6.2. Resultados del problema de rotura de presa.	182

6.3. Colapso bidimensional de una columna de agua (tomado de MARTIN Y MOYCE [1952]).	183
6.4. Simulación del colapso bidimensional de una columna de agua.	184
6.5. Error absoluto del volumen total del fluido.	185
6.6. Error relativo del volumen total del fluido.	185
6.7. Campo de velocidades de la simulación del colapso bidimensional de una columna de agua.	186
6.8. Formas α en la simulación del colapso bidimensional de una columna de agua.	187
6.9. Definición del problema para la propagación de una onda solitaria. . .	189
6.10. Configuración inicial del problema de propagación de una onda solitaria. Se muestra la Forma α (a), la distribución de los nodos (b) y el campo de velocidades (c).	190
6.11. Resultados calculados en el paso de tiempo número 15. Se muestra la Forma α (a), la distribución de los nodos (b) y el campo de velocidades (c).	191
6.12. Forma α (a), distribución de los nodos (b) y campo de velocidades (c) para el paso de tiempo número 31, donde se alcanza la altura máxima $R = 4,2025$	192
6.13. Campo de velocidades en los pasos 1, 15 y 31 de la simulación.	193
6.14. Geometría y nube de nodos para el problema de la burbuja inmersa en un fluido viscoso.	194
6.15. Evolución de la burbuja en el seno de un fluido viscoso. Instantes de tiempo 1 (a), 50 (b), 100 (c), 150 (d), 200 (e) y 220 (f).	195
6.16. Campo de velocidades en los pasos 100 y 220.	197
6.17. Configuración de la nube de puntos en el paso 125.	198



ÍNDICE DE TABLAS

4.1. Resultados para el <i>patch test</i> sobre nueve nodos distribuidos sobre el cuadrado unidad. Método de descomposición del soporte. (<i>N.P.C.</i> son las siglas de Número de Puntos de Cuadratura)	107
4.2. Resultados para el <i>patch test</i> sobre la nube de puntos descrita en la figura 4.11.	120
4.3. Resultados para el problema de placa con agujero.	121
4.4. Norma del error L_2 en la aplicación del <i>patch test</i> tridimensional. . .	123
4.5. Norma del error L_2 para el problema del cilindro con agujero.	128
4.6. Norma del error $\ \cdot\ _{L_2}$ para el problema del cilindro con agujero. . .	129
5.1. Resultados para la viga sometida a flexión, expresado como % del resultado teórico en el extremo de la viga.	161

INTRODUCCIÓN

El desarrollo que en estos últimos años ha sufrido el mundo de la simulación numérica de todo tipo de fenómenos físicos se debe en gran medida al uso de nuevas técnicas de cálculo numérico y el incremento de la capacidad de los nuevos ordenadores que permiten realizar algoritmos más complejos en tiempos de cálculo razonables. Las simulaciones por ordenador del comportamiento de sólidos o fluidos, mediante las oportunas formulaciones matemáticas de las leyes que los rigen, permiten obtener resultados cuantitativos en procesos de gran complejidad. En esta tesis se pretende avanzar precisamente en la simulación de algunos de estos problemas, cuyo modelo matemático viene gobernado por ecuaciones en derivadas parciales.

El método numérico más extendido para la obtención de una solución aproximada de un problema gobernado por ecuaciones en derivadas parciales, y el que más desarrollo ha tenido en su aplicación tanto a la mecánica de sólidos como a otras disciplinas, es el método de los Elementos Finitos. Este método proporciona resultados de gran precisión en su aplicación a problemas de muy difícil tratamiento. El método de los Elementos Finitos necesita una discretización del dominio, con ciertas características especiales, para realizar correctamente tanto la integración numérica del sistema de ecuaciones integro-diferencial al cual conduce el método de Galerkin, como la propia construcción de las funciones de aproximación en las que se basa el método. A lo largo de estas últimas décadas, se han dado grandes avances en la

mejora de estos procedimientos. Sin embargo, la generación automática de mallas computacionales es hoy un campo abierto de investigación, con un gran número de grupos trabajando, especialmente para dominios complejos en tres dimensiones, donde la generación “manual” de la malla es aún una de las partes del proceso que más tiempo requiere dentro del procedimiento general de confección de un modelo numérico para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales por el método de los Elementos Finitos.

Teniendo en cuenta la gran dificultad de generar la malla y el tiempo que se dedica a ello, en los últimos años ha aparecido una nueva línea de investigación con el fin de evitar finalmente su realización. En concreto, en esta última década se ha ido desarrollando una familia de métodos de aproximación denominados métodos *sin malla*, sobre los que ha ido aumentando el interés de los investigadores a medida que se han ido perfeccionando. La característica más significativa de estos métodos es que no necesitan información fija acerca de la conectividad entre los nodos (KRONGAUZ [1996]). Varios han sido los nombres propuestos para estos métodos en un intento por caracterizarlos: métodos de puntos, de punto finito, métodos sin elementos, de elementos difusos, etcétera, haciendo hincapié en cada caso en alguna característica del método particular. En todos ellos, la conectividad de los elementos se genera desde el propio método con un algoritmo de búsqueda de nodos cuya función de forma asociada tenga influencia sobre el punto considerado (en general, un punto de integración), en un proceso transparente para el usuario.

Uno de los últimos de estos métodos en ser aplicado a la mecánica de sólidos ha sido el método de los Elementos Naturales (SUKUMAR ET AL. [1998], TRAVERSONI [1994]). Este método presenta una característica que en principio le diferencia de todos los demás métodos sin malla, que es su función de aproximación. Ésta es estrictamente interpolante, en contraposición con la mayoría de los otros métodos sin malla donde las funciones son solamente aproximantes, esto es, la función de forma en éstos no toma el valor unidad en el nodo al que está adscrita y cero en el resto, con la consiguiente dificultad a la hora de imponer las condiciones de contorno esenciales. Las características que proporciona este método y sus posibilidades de aplicación y desarrollo han sido claves para elegir este método como pilar básico del desarrollo de esta tesis y futuras líneas de desarrollo, en el campo de la Mecánica Computacional.

Uno de los aspectos donde todos los métodos sin malla y en particular el método de los Elementos Naturales muestran cierta debilidad es en la integración numérica. Quizá sea éste uno de los aspectos que menos interés ha suscitado entre los investigadores en estos últimos años; sin embargo, debido al carácter racional

de las funciones de forma que determinan dichas técnicas, se produce un error de integración al hacer uso de fórmulas de cuadratura creadas para integrar polinomios. Además, otro aspecto referente a la integración numérica de los métodos sin malla surge de forma natural. Los distintos soportes de las funciones de forma de los distintos métodos pueden no coincidir con los dominios de integración de las cuadraturas utilizadas. En este contexto se han propuesto y desarrollado diversas técnicas de integración numérica donde se presentan formulaciones de cuadratura que son capaces de representar fielmente el dominio de integración (véase, por ejemplo, ATLURI ET AL. [1999], DE Y BATHE [2001b], DE Y BATHE [2001a]).

Una de las posibilidades de aplicación del método de los Elementos Naturales es la simulación numérica de materiales casi o totalmente incompresibles, que ha sido también un campo abierto a la investigación durante décadas. Es bien conocido el fenómeno de bloqueo volumétrico que se produce al utilizar ciertas aproximaciones de Elementos Finitos, que producen sistemas muy mal condicionados debido a la exigencia de la incompresibilidad del sólido o del fluido, es decir, de imponer que la divergencia del campo de desplazamientos se anule (caso de incompresibilidad total). El análisis de aproximaciones mixtas en desplazamientos y presiones (usualmente las aproximaciones de velocidad y presión son las que se usan en Mecánica de Fluidos) ha llevado a superar estas dificultades, siendo muy bien conocido que no todas las aproximaciones de Elementos Finitos derivados de estos principios variacionales convergen a la solución exacta.

La necesidad de satisfacer la desaparición de deformaciones volumétricas en el límite de la incompresibilidad impone restricciones adicionales al campo de desplazamientos que no son fáciles de verificar usando métodos de Elementos Finitos con aproximaciones en desplazamientos. En la última década se ha afirmado que los métodos sin malla pueden solucionar esas dificultades usando aproximaciones en desplazamientos (véase BELYTSCHKO ET AL. [1994]), ya que estos métodos emplean usualmente aproximaciones más ricas que las tradicionales de Elementos Finitos. Hoy en día, es sabido que dicha afirmación no es cierta (DOLBOW Y BELYTSCHKO [1999]).

Los métodos sin malla, en particular el método de los Elementos Naturales, son una elección atractiva para la simulación de ciertas clases de fenómenos, tales como los que implican grandes deformaciones y grandes desplazamientos. Sin embargo, para ser competitivos con Elementos Finitos, deberían ser capaces de reproducir con precisión las restricciones de incompresibilidad mencionadas anteriormente. Esto ha motivado numerosas investigaciones con objeto de encontrar aproximaciones sin malla eficientes capaces de incorporar tales restricciones. En particular, los métodos

sin malla se presentan como una clara alternativa al uso generalizado de los Elementos Finitos en la simulación de problemas de Dinámica de Fluidos. Está extendido el uso de una filosofía Euleriana en la simulación de dicho comportamiento, es decir, el uso de una nube de puntos fija por la que se mueve el fluido. Sin embargo, el uso de un algoritmo Lagrangiano parece más adecuado a la filosofía que llevan consigo los métodos sin malla, donde bajo este punto de vista, la nube de puntos es la que se mueve formando parte del fluido. Esto permite la simulación de problemas complejos con grandes deformaciones.

1.1 Estado del arte

Los métodos sin malla se encuentran en todos los casos en fase de desarrollo, aunque algunos trabajos en los últimos años han contribuido de manera muy importante a la comprensión del funcionamiento de los mismos y de los principios que permiten construir espacios de funciones de aproximación de una forma apropiada (BABUŠKA Y MELENK [1996]). Otros métodos han sufrido un desarrollo algo mayor y su estudio se ha extendido a problemas no lineales, predominando las aplicaciones a la mecánica de la fractura, especialmente la simulación del crecimiento de grietas en trayectorias no prefijadas como en KRONGAUZ [1996].

El primer método sin malla en ser desarrollado fue el denominado “Smooth Particle Hydrodynamics” en 1977 por LUCY [1977] y MONAGHAN [1982], aunque su aplicación no fue originariamente en Mecánica de Sólidos. El denominado “Reproducing Kernel Particle Method” de LIU Y CHEN [1995] y LIU ET AL. [1995] es una generalización del anterior, al que se le añade una función de corrección para lograr la consistencia lineal del método. Sin embargo, la familia de métodos más numerosa deriva del esquema de Mínimos Cuadrados Móviles (*MMCM*), en cuyo seno se encuentran métodos como el “Difuse Element Method” (*DEM*) de NAYROLES ET AL. [1992], el “Element Free Galerkin Method” (*EFGM*) de BELYTSCHKO ET AL. [1998b], BELYTSCHKO ET AL. [1994] o las nubes-*hp* (DUARTE Y ODEN [1996]). Duarte y Oden, por un lado, y Babuška y Melenk por otro, observaron que el hecho fundamental de estos métodos residía en la construcción de una partición de la unidad. Todos estos métodos presentan, en su formulación más general, funciones de forma no estrictamente interpolantes, es decir, la función de forma no toma el valor unidad en el nodo al que está adscrita y cero en el resto de nodos. Como consecuencia, la superficie interpolada no pasa por los valores nodales. Esto tiene repercusiones inmediatas en la imposición de condiciones de contorno esenciales, al no poder realizarse una sustitución directa de los valores prescritos en el

vector de soluciones. Se han propuesto diversas soluciones parciales a este problema, como por ejemplo la presentada en BELYTSCHKO ET AL. [1994], que no logran sino la satisfacción puntual, en los nodos, de las condiciones de contorno. Esto se debe a que el valor de la función de forma en el contorno depende no sólo de los valores nodales en el mismo, sino también de valores en los nodos interiores del dominio. Otras aproximaciones a este problema incluyen el acoplamiento con Elementos Finitos (como la propuesta en KRONGAUZ [1996]), pero obviamente esto elimina el carácter de método sin malla buscado.

En el caso del método de los Elementos Naturales se evitan algunos de estos problemas, mientras que aparecen otros nuevos. La función de forma del método, por ejemplo, es estrictamente interpolante, con lo que la imposición de condiciones de contorno esenciales puede hacerse por sustitución directa de los coeficientes correspondientes a los grados de libertad prescritos en el vector de soluciones. Otros problemas derivan de la integración de las funciones de forma sobre celdas que no reproducen la geometría del soporte de las mismas. Esto, unido al hecho de que las funciones de forma no tienen una expresión polinomial, complica la integración numérica e impide que el método pase el criterio de la parcela con toda la exactitud de la máquina.

En resumen, el método de los Elementos Naturales necesita ser estudiado en profundidad en su aplicación a problemas no lineales, ya sean en dos o en tres dimensiones.

Una de las características que tiene el método de los Elementos Naturales es el cumplimiento del paradigma de Partición de la Unidad. Esto proporciona la capacidad de enriquecer el espacio de búsqueda de la solución aproximada de la solución. El uso de estas técnicas de formulaciones mixtas enriquecidas aplicadas al método de los Elementos Finitos ha sido ampliamente desarrollado y estudiado a lo largo de las últimas décadas; sin embargo, no se conocen estudios sobre el enriquecimiento de los métodos de Elementos Naturales con aproximaciones mixtas para su aplicación a la Mecánica de Fluidos y que eviten el bloqueo volumétrico mencionado anteriormente.

En el capítulo 2 se profundiza en la descripción del Estado del Arte de los métodos sin malla, describiendo brevemente los más importantes de ellos.

1.2 Objetivos y alcance de la tesis

En general y tal como se ha venido comentando, el desarrollo de todos los métodos sin malla se ha enfrentado a algunas dificultades fundamentales. En primer lugar,

todos los métodos sin malla sin excepción poseen funciones de forma racionales. Esto provoca errores de integración debidos al uso de las reglas de cuadratura habituales, pensadas para polinomios.

En segundo lugar, el desarrollo de formulaciones que permitan evitar el bloqueo volumétrico para medios incompresibles es otra de las etapas fundamentales en el afianzamiento de estos métodos. La afirmación de BELYTSCHKO ET AL. [1994] de que el *EFG* permitía obtener aproximaciones sin bloqueo (incluso utilizando principios variacionales estándar) o la más actual de MORAN Y YOO [2002] en el mismo sentido para el *MEN* parecen, cuando menos, arriesgadas.

Por último, una de las grandes ventajas que se supone que un método sin malla debe poseer es la capacidad de soportar grandes deformaciones y desplazamientos sin merma en la precisión de los resultados. La Dinámica de Fluidos, desde una perspectiva Lagrangiana, parece un buen test para dicho comportamiento.

En un intento de solucionar algunos de los problemas mencionados, se proponen en esta tesis técnicas de mejora de la integración numérica del método, donde se profundiza en el análisis de las mismas y se comparan con las diferentes alternativas existentes y más conocidas como pudiera ser el método de los Elementos Finitos y el método de los Elementos Naturales en su versión estándar. Parte del contenido de esta tesis se dedica al estudio del comportamiento del método en el contexto de la elasticidad bidimensional y tridimensional.

Por otro lado, debido a las características que presenta el método de los Elementos Naturales, entre ellas el cumplimiento del paradigma de partición de la unidad, se desarrollan formulaciones mixtas enriquecidas para abordar problemas de casi o total incompresibilidad del medio, evitando el fenómeno de bloqueo volumétrico que presentan las técnicas usuales. En la actualidad, no se conocen desarrollos de técnicas de Elementos Naturales mixtos enriquecidos que presenten dicha característica, ni su aplicación a la Mecánica de Fluidos. Se pretende validar, siempre que sea posible, el método desarrollado mediante su utilización para la resolución de problemas con solución analítica conocida.

Para finalizar, se presenta una novedosa técnica de Elementos Naturales basada en el método de las características para simular, desde un punto de vista Lagrangiano, fenómenos descritos por la Dinámica de Fluidos. Generalmente se utilizan algoritmos Eulerianos en la simulación dinámica de flujos. Sin embargo, el uso de una técnica de métodos basados en las características hace atractiva la aplicación de una filosofía Lagrangiana. Dada la naturaleza de algunos tipos de fluidos, se pretende validar el método, en algunos casos, con la comparación con resultados experimentales presentes en la literatura específica.

1.3 Metodología

El desarrollo antes descrito exigirá principalmente una comparación entre los resultados del método escogido con el método de los Elementos Finitos y con el método de los Elementos Naturales en su versión estándar, siempre que esto sea posible.

Durante la última década se ha venido desarrollando en el área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad de Zaragoza un código muy flexible, originalmente de Elementos Finitos que ha permitido a lo largo de estos años la implementación de diversas formulaciones de Elementos de Contorno y Elementos Naturales. Este código, denominado *Mydas* y que está implementado en lenguaje de programación *C*, permite la incorporación al mismo de las formulaciones mixtas y enriquecidas propuestas anteriormente, así como las técnicas de integración que se desarrollan en esta tesis, siendo factible la comparación entre los distintos métodos ya existentes en dicho código.

En general, siempre que sea posible, los resultados de las formulaciones propuestas se comprobarán resolviendo problemas con solución analítica conocida.

1.4 Estructura de la tesis

El desarrollo de esta memoria está estructurado en siete capítulos donde se pretende analizar las distintas aportaciones mencionadas anteriormente.

El primero de ellos corresponde a esta introducción que sirve como presentación y alcance de los objetivos finales de la tesis, así como la metodología ya comentada.

El segundo capítulo es una breve introducción a los métodos sin malla, tanto en lo referente a la estructura matemática en la que están basados, como a los diferentes métodos que han ido surgiendo a lo largo de estos últimos años. Para cada uno de estos métodos, los más populares, se realiza un breve desarrollo de la construcción de la aproximación en la que están basados, así como la problemática que los envuelve.

Uno de estos métodos es la base principal en la que se asienta el desarrollo de esta tesis, el método de los Elementos Naturales. Dicho método se analiza en profundidad en el tercer capítulo, así como sus propiedades y algunas de las nuevas versiones existentes en la literatura.

El cuarto capítulo desarrolla nuevas técnicas de integración numérica aplicadas al método de los Elementos Naturales. Se analiza la implementación de dichas técnicas en el código de Elementos Naturales, los resultados numéricos obtenidos en

distintos problemas en dos y en tres dimensiones y las comparaciones con el método de Elementos Finitos y Elementos Naturales en su versión estándar.

El quinto capítulo describe el comportamiento del método de los Elementos Naturales en la simulación de medios incompresibles. Se proponen formulaciones mixtas y enriquecidas del método, analizando su comportamiento y propiedades. Se ofrecen también resultados numéricos de las diferentes formulaciones propuestas comparadas con las soluciones analíticas de los diferentes problemas.

En el capítulo seis, se presenta el desarrollo de formulaciones de Elementos Naturales basados en el método de las características como aplicación a problemas de dinámica de fluidos, ofreciendo una comparación de los resultados obtenidos junto con resultados experimentales o provenientes de soluciones analíticas.

Se finaliza con un último capítulo en el que se resume esta memoria y se hace hincapié en las aportaciones más relevantes que se han producido en su desarrollo. Asimismo, se enumeran las líneas de investigación que, a juicio del autor, quedan abiertas como consecuencia de la misma.

MÉTODOS SIN MALLA

Desde su aparición, en la década de los años 50, el método de los Elementos Finitos ha sido el método de cálculo más popular y usado en ingeniería. Sin embargo, este procedimiento no es siempre el más ventajoso. De hecho, existen fenómenos cuya simulación mediante el *MEF* proporciona resultados poco exactos o, incluso, directamente inservibles. Como ejemplo, podrían citarse aquellos problemas que presentan una malla muy distorsionada. Recientemente se ha desarrollado una familia de métodos en los cuales se discretiza el continuo mediante un conjunto de nodos o partículas, en vez de hacerlo mediante un conjunto de elementos (como es el caso del método de los Elementos Finitos), sin que aparezcan restricciones sobre la forma de la malla. Estos métodos reciben el nombre de *métodos sin malla* y las ventajas que proporcionan a priori son varias: 1. Permiten grandes deformaciones, ya que la conectividad entre nodos se genera como parte del cálculo y puede variar en el tiempo; 2. Son más fáciles de generar, ya que no es necesario hacer una malla de elementos, sino que basta un conjunto de puntos como dato inicial; 3. Pueden tratar fácilmente problemas de propagación de grietas; 4. En zonas donde es necesario un refinamiento pueden añadirse nodos fácilmente, teniendo controlada la precisión de los métodos (h adaptabilidad); 5. Pueden incorporar en forma simple un enriquecimiento de la aproximación.

En general, los métodos sin malla se pueden clasificar según dos criterios dis-

tintos: principios físicos, o formulaciones computacionales. Teniendo en cuenta el modelo físico, existen dos clases de métodos sin malla: los que están basados en modelos deterministas, y aquellos que están basados en modelos probabilistas. Por otro lado, teniendo en cuenta los modelos computacionales, los métodos se pueden diferenciar entre aquellos que aproximan la forma fuerte de las ecuaciones en derivadas parciales, y aquellos basados en la aproximación de la forma débil del problema.

Para aproximar la forma fuerte del problema usando métodos sin malla, se discretiza la ecuación en derivadas parciales mediante técnicas específicas de colocación. Como ejemplo de estos métodos están el *smoothed particle hydrodynamics (SPH)*, LUCY [1977], y el *método de diferencias finitas generalizado*, LISZKA [1984], LISZKA Y ORKISZ [1980], entre otros.

La segunda clase de métodos sin malla se establece sobre aproximaciones Galerkin de la formulación débil, y se denominan métodos de Galerkin sin malla. Como ejemplo de esta clase de métodos sin malla están el *element free Galerkin method* de BELYTSCHKO ET AL. [1994], el *método de elementos naturales* (TRAVERSONI [1994], BRAUN Y SAMBRIDGE [1995], SUKUMAR [1998]), el *método de partición de la unidad* de BABUŠKA Y MELENK [1996], BABUŠKA Y MELENK [1997], y muchos otros.

En este capítulo se pretende introducir esta familia de métodos, que aún se encuentran en fase de desarrollo, así como explicar sus ventajas e inconvenientes, como la imposición de condiciones esenciales de contorno, la integración numérica, etc. El capítulo está estructurado intentando seguir un orden en el tiempo de la aparición de dichos métodos, desde la aparición, en la década de los años 70, del método *SPH*, hasta los métodos basados en el método de la partición de la unidad, pasando por los métodos basados en una interpolación por mínimos cuadrados móviles.

2.1 El Método de Galerkin

Para describir el método de Galerkin, se presentan a continuación algunas definiciones y resultados útiles para el desarrollo del mismo. Éstas permitirán introducir el concepto de *espacio de Hilbert* y algunos resultados básicos en el análisis variacional.

2.1.1. Definiciones preliminares

Definición 2.1.1. Sea H un espacio funcional vectorial sobre \mathbb{R} . Una forma bilineal

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u, v \longmapsto (u, v)$$

se denomina producto escalar si es simétrica y definida positiva, es decir, si cumple que

$$\begin{aligned}(u, v) &= (v, u), & \forall u, v \in H \\ (u, v) &\geq 0, & \forall u \in H \\ (u, u) &= 0 \iff u = 0\end{aligned}$$

En tal caso

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}, \quad u \in H$$

define una norma sobre H . Un espacio vectorial dotado de un producto escalar se dice espacio pre-Hilbert o euclídeo.

Definición 2.1.2. Dada una sucesión de funciones de un espacio pre-Hilbert, se dice que es de Cauchy si cumple que

$$\lim_{\min\{n,m\} \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\| = 0$$

Definición 2.1.3. Un espacio vectorial H dotado de un producto escalar se dice espacio de Hilbert si es completo para la norma asociada, es decir, si toda sucesión de Cauchy del espacio H es convergente.

Definición 2.1.4. El espacio de funciones continuas con soporte compacto se denomina $\mathcal{C}_0(\Omega)$.

$$\mathcal{C}_0(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) / f(x) = 0, \forall x \in \Omega \setminus K, K \text{ compacto} \subseteq \Omega\}$$

donde $\mathcal{C}(\Omega)$ es el espacio de las funciones continuas sobre Ω .

Definición 2.1.5. Dado un abierto Ω de \mathbb{R}^n , definimos el espacio $L^1(\Omega)$ como el espacio de las funciones integrables en Ω .

A su vez, se define

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

con $(p < \infty)$ es un espacio vectorial cuya norma inducida viene dada por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nota 2.1.1. Los espacios $L^p(\Omega)$ son espacios de Banach, es decir, espacios vectoriales normados y completos.

Ejemplo 2.1.1. Dado un abierto Ω de \mathbb{R}^n , se tiene que

$$L^2(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible} / \int_{\Omega} (f)^2 dx < \infty\}.$$

Con el producto escalar

$$(f, g) := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

$L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 2.1.6. Dado un espacio de Hilbert, se denomina *convergencia fuerte* a la convergencia en la norma asociada al producto escalar, es decir, $(f_n) \subset H$ converge (fuertemente) a $f \in H$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0. \quad (2.1.1)$$

Se denota por

$$f_n \rightarrow f.$$

Definición 2.1.7. Dado un abierto Ω de \mathbb{R}^n , definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \implies \mathbb{R} / \exists c \geq 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq c \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}$$

con $(p < \infty)$. L^∞ es un espacio vectorial que tiene inducida la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c / |f(x)| \leq c \text{ c.t.p. } x \in \Omega\} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

L^∞ es un espacio vectorial normado. Se denota por *supess* al supremo esencial.

Definición 2.1.8. Sea H un espacio de Hilbert, $(f_n) \subset H$ converge débilmente a $f \in H$ y lo denotaremos por

$$f_n \rightharpoonup f$$

si

$$(f_n, g) \rightarrow (f, g), \quad \forall g \in H.$$

A continuación se presentan algunos resultados que se derivan directamente de las definiciones anteriores. Muchas de las demostraciones de dichos resultados se omiten para no hacer muy extensa esta Tesis, pues son resultados que se pueden encontrar, por ejemplo, en textos clásicos de Análisis Matemático como, por ejemplo, REKTORYS [1980].

Proposición 2.1.1. *Si $f_n \rightarrow f$, entonces $f_n \rightharpoonup f$, es decir, la convergencia fuerte implica la convergencia débil.*

El recíproco de este resultado no es cierto en general y la demostración es trivial.

Proposición 2.1.2. *Si H es un espacio de Hilbert de dimensión finita, la convergencia fuerte y débil son equivalentes.*

Demostración. Basta con tomar una base ortonormal y demostrar que las componentes convergen. Sea e_1, \dots, e_m base ortonormal de H , $f_n \rightharpoonup f$.

Se tiene que

$$f = \sum_{j=1}^m (f, e_j) e_j \quad \forall f \in H$$

Teniendo en cuenta que converge débilmente,

$$(f_n, e_j) \longrightarrow (f, e_j) \quad \forall j$$

Entonces, $(f_n, e_j) e_j \longrightarrow (f, e_j) e_j$ en H . Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^m (f_n, e_j) e_j \longrightarrow \sum_{j=1}^m (f, e_j) e_j$$

O lo que es lo mismo, $f_n \longrightarrow f$. □

Teorema 2.1.3. *En un espacio de Hilbert, toda sucesión débilmente convergente es acotada.*

Demostración. Véase REKTORYS [1980]. □

Definición 2.1.9. Un subespacio V de un espacio de Hilbert H , $V \subset H$ se denomina denso en H si para toda función u en H se puede encontrar una sucesión de funciones $u_n \in V$ que converge a u en H .

Lema 2.1.4. *Sea H un espacio de Hilbert y $V \subset H$ denso en H . Sea una sucesión $(f_n) \subset H$. Entonces si (f_n) es acotada, es decir, existe M tal que*

$$\|f_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

y además

$$(f_n, g) \rightarrow (f, g), \quad \forall g \in V,$$

entonces

$$f_n \rightharpoonup f.$$

Demostración. Sean $u \in H$ y $v \in V$ cualesquiera. Entonces

$$|(f_n - f, u)| \leq |(f_n, u - v)| + |(f_n - f, v)| + |(f, u - v)|,$$

de donde se deduce el resultado. □

Definición 2.1.10. Sea H un espacio de Hilbert. Una sucesión $(e_n)_{n \geq 1} \subset H$ se dice base hilbertiana (numerable) de H si

$$(e_n, e_m) = \delta_{nm}, \quad \forall n, m$$

y $\mathbb{R}\langle e_n : n \geq 1 \rangle$, el conjunto de las combinaciones lineales (finitas) generado por $(e_n)_{n \geq 1} \subset H$, es denso en H .

Nota 2.1.2. Nótese que si denotamos $E_n := \mathbb{R}\langle e_n \rangle$, entonces

$$P_{E_n} u = (u, e_n) e_n,$$

para todo $u \in H$, donde $P_{E_n}^1$, es la proyección de la n -ésima componente. Si $V_n := \mathbb{R}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$

$$P_{V_n} u = \sum_{j=1}^n (u, e_j) e_j.$$

Teorema 2.1.5. *Sea $u \in H$. Entonces*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n,$$

¹Al operador P ($P_K : H \rightarrow K$) que a $f \in H$ le asocia el único $u \in K$ y satisface que $\forall f \in H$, existe un único $u \in K$ ($K \subset H$, convexo, cerrado y no vacío), tal que, $\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|$ se le denomina proyección sobre K .

es decir, la serie anterior converge en H a u . Además se tiene la llamada igualdad de Bessel-Parseval:

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2.$$

Demostración. Puede consultarse en REKTORYS [1980]. □

Ejemplo 2.1.2. Sea (e_n) una base Hilbertiana de un espacio de Hilbert H . Entonces la sucesión (e_n) converge débilmente a 0, pero no fuertemente.

Demostración. Sea $g \in \mathbb{R}\langle e_n, n \geq 1 \rangle$, entonces

$$\langle e_n, g \rangle = \langle e_n, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \rangle \longrightarrow 0 = \langle 0, g \rangle$$

$$\|e_n\| \leq 1 \quad \forall n \Rightarrow e_n \rightharpoonup 0$$

débilmente, por el lema 2.1.4.

$$\|e_n\| = 1 \Rightarrow e_n \not\rightarrow 0$$

□

Ejemplo 2.1.3. En las mismas hipótesis que el ejemplo anterior, la sucesión

$$x_n := ne_n$$

(que no es acotada), cumple

$$(x_n, g) \rightarrow (0, g), \quad \forall g \in \mathbb{R}\langle e_i : i \geq 1 \rangle,$$

pero, en cambio, no converge débilmente a 0, ya que definiendo

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n,$$

se tiene que

$$(x_n, u) = 1,$$

para todo n .

2.1.2. Espacios de Sobolev. Problemas variacionales

A continuación se definen conceptos relativos a los espacios de Sobolev, paso previo para un estudio posterior de los problemas variacionales.

Definición 2.1.11. Se denota por $\mathcal{D}(\Omega)$ al espacio de funciones indefinidamente diferenciables sobre Ω (\mathcal{C}^∞) y con soporte compacto en Ω .

Definición 2.1.12. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n . Se denomina *espacio de Sobolev* a

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

En el caso $p = 2$, se denota $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Introducimos en $W^{m,p}(\Omega)$ la norma

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

y, por tanto,

$$\|u\|_{m,2,\Omega} = \|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Definición 2.1.13. Un espacio vectorial se dice *separable*, si posee un subconjunto denso y numerable.

Teorema 2.1.6. *El espacio $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.*

Lema 2.1.7. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^m(\mathbb{R}^n)$, es decir, $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. La demostración del Teorema y el Lema anteriores puede consultarse en REKTORYS [1980] (página 334) y las referencias que en él se dan. \square

Definición 2.1.14. Sea V espacio de Hilbert, con producto escalar (\cdot, \cdot) y norma asociada $\|\cdot\|$.

Sea $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua.

Y sea $l : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal y continua. Entonces el problema

$$(P) \begin{cases} \text{Calcular } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

(P) se denomina *Problema Variacional Abstracto*.

Definición 2.1.15. Se dice que una forma bilineal a es V -elíptica (o coercitiva) si \exists una constante $\alpha > 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$, $\forall v \in V$.

Teorema 2.1.8 (Lax-Milgram). *Supongamos que en el problema variacional (P), la forma bilineal es V -elíptica. Entonces existe solución única y la aplicación que lleva de la forma lineal l a la solución u es continua.*

Demostración. Puede consultarse en la mayoría de textos clásicos, como por ejemplo, en REKTORYS [1980]. \square

Proposición 2.1.9. Sean $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ $1 \leq i, j \leq n$ y

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 uv dx, \quad u, v \in H^1(\Omega)$$

$$a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una forma bilineal y continua.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |a_{ij}| \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx + \int_{\Omega} |a_0(x)| |u| |v| dx \leq \\ &\leq \max \left\{ \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \right\} \left(\sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq \\ &\leq C \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Por lo tanto, a es continua. \square

Proposición 2.1.10 (Hipótesis de Elipticidad). *Teniendo en cuenta los resultados anteriores,*

- $\exists \alpha > 0$ tal que $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \alpha \|\xi\|_2^2, \forall x \in \Omega.$$

- $a_0(x) \geq \alpha_0 \geq 0$, $x \in \Omega$.
 Si se verifican las hipótesis de desigualdad se tiene que:
 a es V -elíptica si $\alpha_0 > 0 \wedge$ si $V \cap P_0 = 0$, cuando $\alpha_0 \geq 0$.

Demostración. En efecto,

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 v^2 \geq \alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \alpha_0 \int_{\Omega} v^2 dx$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \alpha |v|_{1,\Omega}^2 + \alpha_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \\ &\begin{cases} \geq \min\{\alpha, \alpha_0\} \|v\|_{1,\Omega}^2; & \text{si } \alpha_0 > 0. \\ \geq \alpha |v|_{1,\Omega}^2 \geq \beta \|v\|_{1,\Omega}^2; & \text{si } \alpha_0 \geq 0 \wedge V \cap P_0 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

□

Proposición 2.1.11 (Problema Variacional Elíptico). Sea $f \in L^2(\Omega)$ y definimos la aplicación l lineal y continua, tal que,

$$\begin{aligned} l : H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto l(v) = \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

Si al problema (P) consistente en:

$$(P) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in V \end{cases}$$

le aplicamos el Teorema de Lax-Milgram 2.1.8, (P) admite solución única (supuesto que la forma bilineal a es V -elíptica).

Demostración. Puede consultarse en REKTORYS [1980].

□

2.1.3. Problemas de Contorno Elípticos

Veamos a continuación la formulación variacional de los problemas de contorno elípticos:

Dados

- a) V espacio de Hilbert ($H_0^1(\Omega) \subseteq V \subseteq H^1(\Omega)$).
- b) $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal continua sobre $V \times V$.
- c) $l(\cdot)$ una forma lineal continua sobre V .
- d) El problema variacional abstracto

$$(P) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \text{ tal que,} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Se considera ahora $\{V_h\}_{h>0}$ ($h \rightarrow 0$) con V_h subespacio de dimensión finita de V . Por lo tanto podemos definir para cada índice h , el problema (que también será variacional)

$$(P_h) \begin{cases} \text{Calcular } u_h \in V_h \text{ tal que,} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

V_h también será espacio de Hilbert por ser subespacio de dimensión finita de un espacio de Hilbert V , con su correspondiente norma inducida de V .

Si la forma bilineal a es V -elíptica, es decir, si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in V,$$

entonces también la forma bilineal a es V_h -elíptica, es decir,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|^2, \quad \forall u_h \in V_h \subseteq V.$$

Aplicando el lema de Lax-Milgram anterior, (P) y (P_h) tienen solución única.

Nota 2.1.3. Los problemas P_h están definidos en espacios de dimensión finita, de forma que es posible poner sus elementos como combinación de una base de dichos espacios. Bastará con resolver un sistema de ecuaciones lineales para obtener la solución u_h .

Proposición 2.1.12 (Lema de Cèa). *Bajo las hipótesis anteriores (problemas variacionales) y con una forma bilineal coercitiva (V -elíptica), se tiene que*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \text{Inf}_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|,$$

donde M es la constante de continuidad de la forma bilineal, y α es la constante de coercitividad de la misma.

Demostración.

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - u_h + v_h - v_h)$$

Teniendo en cuenta la bilinealidad de a ,

$$= a(u - u_h, u - v_h) - a(u - u_h, u_h - v_h) = a(u - u_h, u - v_h),$$

ya que como u es solución de P , tomando $w_h \in V_h$, entonces $a(u, w_h) = l(w_h)$ y $a(u_h, w_h) = l(w_h)$ se tiene que $a(u - u_h, u_h - v_h) = 0$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq, \text{ por continuidad} \\ &\leq M \|u - u_h\| \cdot \|u - v_h\| \end{aligned}$$

De donde,

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \quad \forall v_h \in V_h$$

□

Nota 2.1.4. Cuando se tome V_h tal que cada vez vaya llenando V (aumentándose la dimensión del subespacio) entonces la distancia del ínfimo se hará más pequeña obteniendo así una mejor aproximación de la solución del problema original (P) a través de la de (P_h).

Teorema 2.1.13 (Teorema General de Convergencia). *Supongamos que existe \mathcal{V} subespacio denso de V y $v_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$, tales que $\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h(v)\| = 0$, $v \in \mathcal{V}$. Entonces el método de aproximación variacional converge, es decir,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, con \mathcal{V} subespacio denso en V , entonces

$$\exists v \in \mathcal{V} \text{ tal que } \|u - v\| \leq \frac{\varepsilon}{2c}$$

con $c = \frac{M}{\alpha}$. Por la hipótesis del Teorema,

$$\exists h_0 \text{ tal que } \|v - v_h(v)\| < \frac{\varepsilon}{2c}, \quad \forall h \leq h_0.$$

Finalmente,

$$\|u - u_h\| \leq c\|u - v_h(v)\| \leq c\left(\|u - v\| + \|v - v_h(v)\|\right) \leq \varepsilon.$$

Ya que $v_h(v)$ pertenece al subespacio V_h . \square

Teorema 2.1.14. *Si la forma bilineal continua a es V -elíptica, entonces $\exists u_m \in V_m$ solución única del problema (P_m) , y el $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u$, en V (fuertemente), donde u es la solución del problema (P) .*

Demostración. Basta aplicar el Teorema General de Convergencia, con $h = \frac{1}{m}$, $V_h = V_m$, $\mathcal{V} = V$ y $v_h = \prod_m$ (Proyección ortogonal de V en V_m). \square

Nota 2.1.5 (Interpretación del PVI). En primer lugar, como $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$, si u es solución de (P) se tiene que

$$a(u, \varphi) = l(\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\Omega} a_0 u \varphi = \\ & = \sum_{i,j=1}^n \left\langle -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \varphi \right\rangle + \langle a_0 u, \varphi \rangle = \\ & = \left\langle -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u, \varphi \right\rangle = \\ & = \langle \mathcal{A}u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{A}u = f$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.² Así, $\mathcal{A}u = f$ en $L^2(\Omega)$, es decir, en casi todo punto $x \in \Omega$.

Por lo tanto, el problema (P) es equivalente al siguiente:

Encontrar $u \in V$, que cumpla que $\mathcal{A}u = f$ en casi todo punto $x \in \Omega$ y tal que $a(u, v) = \int_{\Omega} \mathcal{A}u v dx, \forall v \in V$.

²Se denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$ a toda forma lineal y continua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. $T \in \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow T(\phi) = \langle T, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Una vez definidos todos los elementos anteriores, considérese el espacio de Hilbert H y un subespacio $M \subset H$ denso en H . Consideremos $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ una base de H . Supongamos que existe $u \in H$ tal que

$$(u, \varphi_k) = \int_{\Omega} u(x)\varphi_k(x)dx = 0 \quad \forall k \quad (2.1.3)$$

entonces debe darse que $u = 0$ en H , como se demuestra en REKTORYS [1980].

Proposición 2.1.15. *Sea $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ una base de H , se tiene que el conjunto N formado por elementos contruidos de la siguiente forma,*

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \quad (2.1.4)$$

es denso en H .

De esta forma, se puede concluir que se cumple que

$$\left(u, \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right) = 0 \quad (2.1.5)$$

para cualquier elemento de N formado teniendo en cuenta la definición dada en la ecuación (2.1.4).

Demostración. Trivial. □

2.1.4. Método de Galerkin

Llegados a este punto, se está en condiciones de describir el método de Galerkin. Dada

$$Au = f \quad (2.1.6)$$

una ecuación diferencial en el espacio H , si es posible encontrar un elemento $u_0 \in D_A^3$ que cumpla

$$\left(Au_0 - f, \varphi_k \right) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (2.1.7)$$

entonces, de acuerdo con (2.1.3), se tendría que

$$Au_0 - f = 0 \quad \text{en } H \quad (2.1.8)$$

³Se denota por D_A al dominio del operador diferencial A .

de forma que u_0 sería la solución del problema (2.1.6).

Nota 2.1.6. Este razonamiento constituye la base del método de Galerkin, que es la base fundamental de la mayoría de los métodos sin malla y del método de los Elementos Finitos.

A continuación, consideremos de nuevo la base del subespacio M , $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Podemos construir una solución aproximada u_0 a partir de esta base, en la forma

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \quad (2.1.9)$$

siendo n un número arbitrario, pero fijo. Los coeficientes a_k serán, a partir de este momento, nuestras incógnitas. En el método de Galerkin, estas constantes se calculan imponiendo la siguiente igualdad,

$$(A_n - f, \varphi_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (2.1.10)$$

La ecuación (2.1.10) representa un sistema de n ecuaciones con n incógnitas (los coeficientes a_k). Dado que el operador diferencial A es lineal, las ecuaciones anteriores se podrán transformar en

$$(a_1 A \varphi_1 + \dots + a_n A \varphi_n - f, \varphi_k) = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (2.1.11)$$

o bien,

$$\begin{aligned} (A \varphi_1, \varphi_1) a_1 + (A \varphi_2, \varphi_1) a_2 + \dots + (A \varphi_n, \varphi_1) a_n &= (f, \varphi_1), \\ (A \varphi_1, \varphi_2) a_1 + (A \varphi_2, \varphi_2) a_2 + \dots + (A \varphi_n, \varphi_2) a_n &= (f, \varphi_2), \\ &\dots \\ (A \varphi_1, \varphi_n) a_1 + (A \varphi_2, \varphi_n) a_2 + \dots + (A \varphi_n, \varphi_n) a_n &= (f, \varphi_n) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente teorema:

Teorema 2.1.16. *Sea A un operador definido positivo sobre un conjunto D_A , denso en un espacio separable de Hilbert H y sea también $f \in H$. Consideramos los elementos $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in D_A$, que constituyen una base de D_A . Entonces, la sucesión de Galerkin (2.1.9) con las constantes a_1, a_2, \dots determinadas unívocamente por las condiciones (2.1.10), esto es, por el sistema (2.1.12) en el caso lineal, converge a la solución de la ecuación $Au = f$.*

Nota 2.1.7. El método de Galerkin ha sido desarrollado usando la misma base en la construcción de la solución aproximada (2.1.9) y en la formulación de la condición (2.1.10). En estas condiciones, el método se denomina en ocasiones como de *Bubnov-Galerkin*. Si estas bases se escogen diferentes, el método suele denominarse de *Petrov-Galerkin*.

2.2 Solución débil del problema de valores en el contorno

La mayoría de los métodos sin malla surgen de la búsqueda de una solución débil al problema de valores en el contorno. Esta es la razón por la que se incluye aquí un breve repaso de su definición y de sus propiedades más importantes. Sin embargo, hay que hacer notar que no todos los métodos sin malla utilizan la forma débil del problema, aunque sí los más extendidos como el *Element Free Galerkin* de BELYTSCHKO ET AL. [1994], o las *nubes* h-p de DUARTE Y ODEN [1996]. Previamente se introducirán algunos conceptos necesarios para la obtención de la forma débil del problema de valores en el contorno.

Definición 2.2.1. Se denomina $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ al conjunto, lineal, de todas las funciones $u(x)$ que son continuas y tienen derivadas de cualquier orden en el dominio cerrado $\bar{\Omega}$.

Utilizando ahora la notación *de multiíndices*:

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_N) \quad (2.2.1)$$

se puede definir la siguiente derivada

$$D^i u = \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_N} u}{\partial x_1^{i_1}, \dots, \partial x_N^{i_N}} = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1}, \dots, \partial x_N^{i_N}} \quad (2.2.2)$$

y se define, a partir de ellos, un producto interno que se denota por:

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{|i| \leq k} \int_{\Omega} D^i u D^i v d\Omega, \quad u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}), \quad v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \quad (2.2.3)$$

Con este producto interno es inmediato definir una norma en el espacio $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$:

$$\|u\|_{H^k} = \sqrt{(u, u)_{H^k}}, \quad u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \quad (2.2.4)$$

con la cual el espacio $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ adquiere estructura de espacio *métrico* o *pre-Hilbert*, denominándose habitualmente por S_2^k .

Nota 2.2.1. Obsérvese que S_2^k no es un espacio de Hilbert, puesto que no se le ha exigido que sea completo. Por tanto, una sucesión de Cauchy $\{u_n\} \in S_2^k$ puede tener límite en el propio S_2^k o fuera de él. En este último caso, dado que la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy en S_2^k , la sucesión de sus derivadas $\{D^i u_n\}$, con $|i| \leq k$ lo será en L^2 (puede consultarse una demostración rigurosa en REKTORYS [1980]). En este caso, se cumplirá que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^i u_n = v^{(i)} \quad \text{en } L^2(\Omega) \quad (2.2.5)$$

Definición 2.2.2. A las funciones $v^{(i)}$ se las denomina *derivadas generalizadas* de u .

Nota 2.2.2. Tal y como se han definido los espacios de Sobolev, (2.1.12), se tiene que el espacio de Hilbert cuyos elementos pertenecen a $L^2(\Omega)$ y tienen derivadas generalizadas hasta el orden k se le denomina $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. Por tanto, el espacio $H^k(\Omega)$ estará formado por funciones que provienen de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ y por aquellas funciones de $L^2(\Omega)$ para las cuales es posible hablar —en sentido generalizado— de derivada hasta el orden k .

Definición 2.2.3. Para toda función continua en $\overline{\Omega}$ su valor en el contorno del dominio estará definido unívocamente. A la función $u(s)$ se la denomina *traza* de la función $u(x) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Esta función será, por definición, continua en $\Gamma = \partial\Omega$.

En el caso límite de que $u \in H^1$, entonces es posible demostrar que existe un operador acotado, T , que traslada el espacio $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$, de forma que $Tu(x) = u(s)$ (se recomienda la consulta de REKTORYS [1980] y las referencias que en él se dan). Lógicamente, si se considera que $u \in H^k$, con $k > 1$ no existe ningún problema, dado que entonces $H^k \subset H^1$. En otro caso, la definición de traza no estaría unívocamente determinada.

Para la introducción del concepto de *solución débil* del problema de valores en el contorno se puede utilizar, sin pérdida de generalidad, la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet como base del razonamiento. Así el problema vendrá dado por una ecuación en derivadas parciales del tipo:

$$-\Delta u = f \quad (2.2.6)$$

sujeto a las condiciones de contorno

$$u = g(s) , \text{ en } \Gamma = \partial\Omega \quad (2.2.7)$$

Se introduce en este punto el espacio de funciones V como aquel que contiene a las funciones de $H^1(\Omega)$ y que satisface las condiciones de contorno homogéneas $u = 0$ en Γ . Es decir,

$$V = \{v \in H^1 / v = 0 \text{ en } \Gamma\} \quad (2.2.8)$$

Si se toma una función arbitraria $v \in V$ y se multiplica la ecuación (2.2.6) por ella, se tiene

$$- \int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega = \int_{\Omega} v f \, d\Omega \quad (2.2.9)$$

Si a esta expresión le aplicamos el teorema de la divergencia, se obtiene

$$- \int_{\Omega} v \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} d\Omega = - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega \quad (2.2.10)$$

donde se ha utilizado el convenio de índices repetidos. Puesto que se cumple que $v = 0$ en Γ , entonces

$$\int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i d\Gamma = 0 \quad (2.2.11)$$

con lo cual se tiene finalmente que

$$- \int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega \quad (2.2.12)$$

de donde

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Omega} v f \, d\Omega \quad (2.2.13)$$

donde la función v ha sido escogida arbitrariamente. A partir de lo anterior se puede construir la siguiente

Definición 2.2.4. Sea $g(s)$ la traza de una función $w \in H^1(\Omega)$ arbitraria y sea $f \in L^2(\Omega)$. La función $u \in H^1(\Omega)$ se denomina *solución débil* del problema de valores en el contorno dado por las ecuaciones (2.2.6) y (2.2.7) si

$$z = u - w \in V \quad (2.2.14)$$

y si

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Omega} v f d\Omega \text{ se cumple para todo } v \in V$$

Nota 2.2.3. Un hecho fundamental en este desarrollo es, por un lado, que inicialmente, por exigencias del operador diferencial Δ , la función solución *fuerte* o clásica del problema, en caso de existir, debe pertenecer al espacio $\mathcal{C}^2(\Omega)$ —de lo contrario no existiría la expresión (2.2.6)—. Como consecuencia de la manipulación efectuada anteriormente, la solución débil del problema se busca en el espacio H^1 , es decir, se han rebajado las exigencias sobre el espacio de búsqueda.

Nota 2.2.4. Otro comentario interesante surge al considerar condiciones de contorno esenciales no homogéneas (es decir, del tipo $g(s) \neq 0$, ecuación (2.2.7)). Aparece un nuevo problema, dado que se pierde la linealidad del conjunto de funciones en el que buscamos la solución. Supóngase un problema en el que la condición de contorno exige que $u = 2$ en Γ_u . El conjunto de funciones que cumple estas condiciones de contorno no es lineal, desde el momento en que dos de sus funciones, u y v , cumplen que $u + v = 4$ en Γ_u y, por tanto, no pertenece al mismo espacio que u y que v . Para solventar este problema en el método de Galerkin (y en particular en la exposición anterior) se ha acudido al siguiente artificio: supóngase que se es capaz de encontrar una función w , continua en $\bar{\Omega}$, de tal forma que $-\Delta w \in L^2(\Omega)$ y que cumple la condición (2.2.7). Entonces se expresa la solución del problema en cuestión como una combinación

$$u = w + z \tag{2.2.15}$$

quedando un problema en la variable z

$$-\Delta z = f + \Delta w, \text{ en } \Omega \tag{2.2.16}$$

$$z = 0, \text{ en } \Gamma \tag{2.2.17}$$

que puede ser resuelto mediante la técnica expresada anteriormente. De aquí la exigencia (2.2.14) introducida anteriormente. Por tanto, a las funciones φ_k que constituyen la base del espacio donde opera el funcional A se les exige que cumplan $\varphi_k = 0$ en Γ .

Obsérvese, que si se escoge la función v como una serie de funciones base del espacio de búsqueda, entonces se puede aplicar al método de Galerkin descrito anteriormente, para encontrar una solución débil aproximada al problema de valores en el contorno. El método de los Elementos Finitos es el método más extendido para

construir esta base, a través del espacio de polinomios a trozos sobre el dominio en estudio Ω .

Los métodos sin malla surgen precisamente del empleo de técnicas de construcción de esta base que no exijan al usuario una malla de fondo (aunque a menudo sí existe una para efectuar la integración numérica) y que, sobre todo, no sean sensibles a la distorsión de ésta. En los sucesivos apartados se efectúa una descripción de algunas de estas técnicas que mayor popularidad han alcanzado.

2.3 Smoothed Particle Hydrodynamics

Tal y como se ha comentado en la introducción de este capítulo, el método *Smoothed Particle Hydrodynamics* se caracteriza por construir una aproximación de la forma fuerte del problema de valores en el contorno (LI Y LIU [2002]). Este método fue uno de los primeros métodos sin malla en ser desarrollado, véase LUCY [1977], y se conoce por las siglas *SPH*.

El *SPH* surge en el campo de la Astrofísica, en la simulación y evolución de galaxias, que siguen leyes similares a la hidrodinámica de Newton, de ahí el nombre del método, ya que el movimiento colectivo de esas partículas (estrellas o galaxias) es similar al movimiento de un líquido o de un gas. La idea del método es algo contraria a los conceptos de los métodos convencionales de discretización. En éstos, se discretiza un sistema continuo en un sistema discreto de ecuaciones algebraicas. En aplicaciones astrofísicas, el sistema real es discreto; para poder evitar singularidades, se genera un campo local continuo introduciendo una función *núcleo*, la cual puede servir como campo suavizado de interpolación. Este núcleo puede interpretarse como la probabilidad de encontrar una partícula en una determinada posición. Por lo tanto, el soporte de dicho núcleo es compacto y se anula a una determinada distancia lo suficientemente lejana de la posición inicial de la partícula a la cual está asociado.

Hoy por hoy, el *SPH* está siendo usado en simulaciones de supernovas, HULTMAN Y PHARAYN [1999], colapsos y formaciones de galaxias, BERCZIK [2000], tratamiento de agujeros negros y estrellas neutras, LEE [1998], MONAGHAN [1990], así como en la simulación en Mecánica de Sólidos y Fluidos, BONET Y LOK [1999].

2.3.1. Construcción de la aproximación

Básicamente se puede decir que es una interpolación basada en estimadores del núcleo. Esencialmente el método consiste en encontrar una función núcleo lo suficientemente suave, denominada $W(\mathbf{x}, h)$, donde h es el soporte de dicho núcleo.

El estimador del núcleo, $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$, de la función $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ definida en un dominio Ω viene dado por

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_y} \mathbf{u}(\mathbf{y})W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h)d\Omega_y \quad (2.3.1)$$

La idea es elegir W_h tal que cumpla las siguientes propiedades para cualquier número real $h \geq 0$

- (i) $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega_y} \mathbf{u}(\mathbf{y})W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h)d\Omega_y = \mathbf{u}(\mathbf{x})$
- (ii) $\int_{\Omega_y} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h)d\Omega_y = 1$
- (iii) W es una función de soporte compacto.
- (iv) W es una función monótona decreciente con la distancia.
- (v) $W(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$

Nota 2.3.1. La condición (i) impone en realidad a la función W que su comportamiento sea como el de una Delta de Dirac cuando el soporte se aproxima a cero. La exigencia de soporte compacto está relacionada con esto último, pero es común a todos los métodos, por la conveniencia de evitar matrices llenas. La última exigencia permite asegurar que el núcleo es continuo, de forma que el campo de variables derivadas sea suave.

Dado que el *SPH* trabaja sobre la forma fuerte del problema, es habitual que se dé $W \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ o superiores.

Ejemplo 2.3.1. Un núcleo muy utilizado es la función Gaussiana:

$$W(x, h) = \frac{1}{(\pi h^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{h^2}\right] \quad (2.3.2)$$

También los *splines* son muy utilizados para este fin.

El soporte de estas funciones de forma es usualmente un disco centrado en el nodo (o bien una esfera en tres dimensiones), pero es posible obtener soportes rectangulares mediante el uso de productos tensoriales (figura 2.1):

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = W(x - x_I)W(y - y_I) \quad (2.3.3)$$

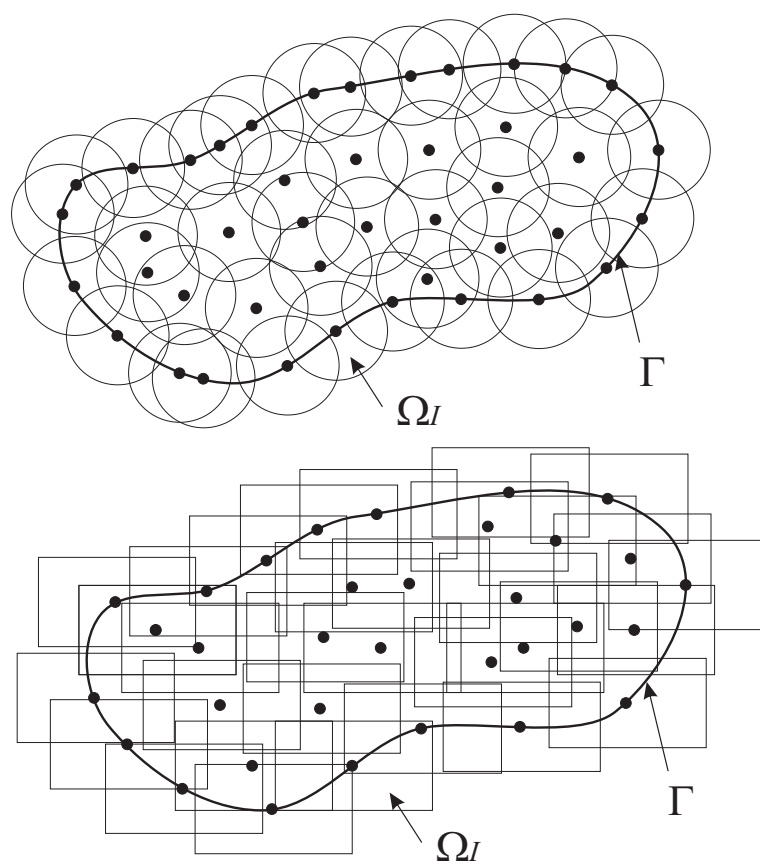


Figura 2.1: Recubrimiento de un dominio bidimensional Ω por las funciones de forma asociadas a cada nodo.

La ecuación (2.3.1) se discretiza mediante cuadratura nodal, dando lugar a:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I:\mathbf{x} \in \Omega_I} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \Delta V_I \mathbf{u}_I \quad (2.3.4)$$

o bien:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I:\mathbf{x} \in \Omega_I} \Phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (2.3.5)$$

donde las Φ_I representan las funciones de forma del método y la cantidad ΔV_I representa una medida del volumen (área en 2D) que rodea al nodo I .

Ejemplo 2.3.2. Por ejemplo, definimos la siguiente función

$$W_h(\mathbf{x}) = \begin{cases} C_0 \exp \frac{h^2}{\|\mathbf{x}\|^2 - h^2}, & \text{para } \|\mathbf{x}\| < h \\ 0, & \text{para } \|\mathbf{x}\| \geq h \end{cases} \quad (2.3.6)$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma Euclídea, que satisface los puntos (i),(ii),(iii),(iv) y (v) anteriores para un C_0 adecuado.

Teorema 2.3.1. *Sea $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in L^p(\Omega)$ entonces*

- (i) $\|\mathbf{u}_h\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^p(\Omega)}$
- (ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^p(\Omega)} = 0$

Demostración. Basta tener en cuenta el Teorema General de Convergencia. Véase ODEN Y REDDY [1976]. □

La integral (2.3.1) está aproximada suponiendo que el dominio está dividido en N pequeños elementos con masa m_1, m_2, \dots, m_N . La contribución de cada uno de estos elementos I cuya masa viene dada por m_I y cuyo centro de masas es \mathbf{x}_I , es,

$$W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{u}(\mathbf{x}_I) m_I \frac{1}{\rho(\mathbf{x}_I)}$$

donde $\rho(\mathbf{x}_I)$ es la densidad en el punto \mathbf{x}_I y (2.3.1) está estimado por

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathcal{Q}(\mathbf{x})} W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{u}(\mathbf{x}_I) \Delta V_I \quad (2.3.7)$$

siempre y cuando W_h tenga soporte compacto, que es una de las propiedades mencionadas anteriormente.

Nota 2.3.2. Nótese que no es necesario el uso de una malla, no hay conexiones fijadas entre los distintos nodos del dominio. La estimación de la cantidad ΔV_I , que representaría una medida del volumen que rodea al nodo I supone a veces un problema añadido a esta formulación, dado que se está planteando una aproximación enteramente basada en nodos. Esta partición del dominio no es fácil en general (geoméricamente hablando), si se tiene en cuenta un problema tridimensional complicado.

La aproximación de las derivadas espaciales de \mathbf{u} se obtiene sustituyendo $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})$ para $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ en (2.3.1).

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} W_h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.3.8)$$

Tras varios pasos, véase SWEGLE ET AL. [1994], se demuestra que

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \nabla W_h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.3.9)$$

Así la aproximación del núcleo permite que los gradientes espaciales queden determinados directamente por los valores de la función y de las derivadas del núcleo, en vez de por las derivadas de la propia función. Como se ha comentado antes, la integral que sería una aproximación continua, se transforma en la suma discreta de puntos de interpolación, SWEGLE ET AL. [1994],

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = - \sum_{I \in \mathcal{Q}(\mathbf{x})} \Delta V_I \mathbf{u}(\mathbf{x}_I) \cdot \nabla W_h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad (2.3.10)$$

Las expresiones (2.3.5) y (2.3.10) se usan en el método *SPH* para resolver problemas de valores en el contorno aplicando directamente las ecuaciones en derivadas parciales en los nodos \mathbf{x}_I , SWEGLE ET AL. [1994]. Siguiendo este proceso de colocación se obtiene un sistema discreto de ecuaciones que puede ser resuelto para obtener los coeficientes de $\mathbf{u}(\mathbf{x}_I)$.

El *SPH* ha sido empleado en simulaciones en mecánica de sólidos y fluidos, tanto compresibles como incompresibles. Sin embargo, es uno de los métodos con problemas de tipo numérico de más variada índole. A continuación se analizan algunos de ellos.

2.3.2. Problemática del *SPH*

Inestabilidad

En determinadas circunstancias, especialmente en la simulación de sólidos sometidos a un estado de tracción, se observó que el movimiento de las partículas era inestable. Este problema está relacionado con la incapacidad del método de reproducir exactamente un estado de desplazamientos lineal, lo que se denomina usualmente *falta de consistencia lineal*, es decir, el método no es capaz de reproducir un campo lineal de forma exacta.

Se han propuesto muy variadas soluciones a este problema. Quizá la más exitosa es la adición al problema de otro conjunto de nodos denominados *puntos de tensión* (“*stress points*”). En estos puntos se evalúan las tensiones u otras magnitudes derivadas del campo esencial, de forma que velocidades, aceleraciones y desplazamientos se mantienen en las partículas del método.

Otras aproximaciones al problema incluyen la adición de términos correctores al núcleo que dependen de la posición relativa de los nodos, con lo que se complica la evaluación de las funciones de forma.

Modos espurios de deformación

Los modos espurios de deformación, que también existen en determinadas formulaciones de Elementos Finitos con integración reducida, se observan también en el *SPH*. La causa debe buscarse en el hecho de que las derivadas del campo esencial se evalúan en los nodos, donde la función W tiene derivadas nulas. Para solucionar esto se puede, simplemente, calcular tensiones y deformaciones en otros puntos que no sean los nodos, tal y como se explicó en el apartado anterior.

Inconsistencia

Además de los problemas anteriores, el *SPH* no parte de una partición de la unidad —a esta propiedad se hará referencia más adelante—, es decir, no puede representar un movimiento como sólido rígido adecuadamente. Esto llevó a LIU ET AL. [1995] a añadir ciertos términos a la aproximación, de forma que el nuevo núcleo

$$\widetilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I; \mathbf{x})W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) \quad (2.3.11)$$

sí posee esta propiedad. Existen hasta siete correcciones de este tipo publicadas, algunas dando lugar a otro método distinto, como el *Reproducing Kernel Particle*

Method, al que se hace referencia en la sección 2.7.

Condiciones de contorno esenciales

La correcta imposición de condiciones de contorno es uno de los temas que más esfuerzo investigador ha consumido en los últimos años en el ámbito de los métodos sin malla. El problema resulta del hecho de que, mientras en el método de los Elementos Finitos las exigencias dadas por la ecuación (2.2.14) se verifican de manera natural, éstas no se cumplen fácilmente con funciones que tienen un soporte circular o que, en general, poseen un soporte que no se adapta a la geometría del contorno. Este problema se debe a dos factores fundamentales. Por un lado, la función de forma del *SPH* —como la mayoría de los métodos sin malla— no es estrictamente interpolante, es decir, no cumple la denominada *condición de la Delta de Kronecker*:

$$\Phi_I(x_J) \neq \delta_{IJ} \quad (2.3.12)$$

Este factor introduce una primera dificultad al darse el hecho de que los coeficientes nodales del sistema discreto de ecuaciones de Galerkin no representan a la variable nodal evaluada en el nodo, es decir, $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_I) = \sum_J \Phi_J(\mathbf{x}_I) \mathbf{u}_J \neq \mathbf{u}_I$. Sin embargo, este hecho tiene una importancia menor, ya que el paso de la función aproximada por los valores nodales puede forzarse mediante el uso de multiplicadores de Lagrange o de formulaciones que incluyan penalización. El problema más grave es que la aproximación construida de acuerdo a (2.3.5) no permite una verdadera interpolación en el contorno esencial, es decir, ciertos nodos interiores poseen una influencia no despreciable sobre el contorno.

Este comentario es extensible a la mayoría de los métodos sin malla.

2.4 Método de Mínimos Cuadrados Móviles

Las aproximaciones de mínimos cuadrados móviles, originales de LANCASTER Y SALKAUSKAS [1986] juegan un papel fundamental en el método de elementos difusos de NAYROLES ET AL. [1992] y en el *Element Free Galerkin Method* de BELYTSCHKO ET AL. [1994].

2.4.1. Construcción de la aproximación

Supongamos que se quiere aproximar una función continua $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d, d = 1, 2 \text{ ó } 3$ y se conocen sus valores \mathbf{u}_I en los puntos $\mathbf{x}_I \in \bar{\Omega}, I = 1, \dots, N$. En

el *MMCM* (*MLSM* en nomenclatura inglesa), una función de aproximación global, $G\mathbf{u}$, de \mathbf{u} se construye primero formando, en cada punto $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$, una aproximación local de mínimos cuadrados ponderados, $L_{\mathbf{y}}\mathbf{u}$, definida en términos de algunas base $\{P_i\}_{i=1}^n, n \leq N$.

Se supone que la base $\{P_i\}_{i=1}^n$ tiene las siguientes propiedades:

- (i) $P_1 \equiv 1$
- (ii) $P_i \in \mathcal{C}^m(\Omega), i = 1, \dots, n$
- (iii) $\{P_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente sobre cualquier conjunto n dado de N puntos de $\overline{\Omega}$.

La aproximación local $L_{\mathbf{y}}\mathbf{u}$, para cada punto $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$, está definida como

$$(L_{\mathbf{y}}\mathbf{u})(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{y})P_i(\mathbf{x}) \quad (2.4.1)$$

Los coeficientes $a_i(\mathbf{y})$ se calculan resolviendo el siguiente problema: Encontrar $\mathbf{a}^*(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n$ tales que $\forall \mathbf{a}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n$,

$$J(\mathbf{a}^*) = \left(\mathbf{u} - \sum_i^n a_i^* P_i, \mathbf{u} - \sum_i^n a_i^* P_i \right)_{\mathbf{y}} \leq \left(\mathbf{u} - \sum_i^n a_i P_i, \mathbf{u} - \sum_i^n a_i P_i \right)_{\mathbf{y}} \quad (2.4.2)$$

donde $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{y}}$ es un producto interno ponderado que depende del punto \mathbf{y} , y está definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{y}} := \sum_I^N \mathbf{u}(\mathbf{x}_I) W_I(\mathbf{y}) \mathbf{v}(\mathbf{x}_I) \quad (2.4.3)$$

donde $W_I(\mathbf{y}), I = 1, \dots, N$, son funciones de peso, $W_I(\mathbf{y}) > 0, \forall \mathbf{y} \in \overline{\Omega}$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

Así

$$J(\mathbf{a}^*) = \sum_{I=1}^N W_I(\mathbf{y}) \left[\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) - \sum_i^n a_i^* P_i \right]^2 \quad (2.4.4)$$

La inecuación (2.4.2) implica que

$$\left(\mathbf{u} - \sum_i^n a_i^* P_i, P_j \right)_{\mathbf{y}} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.4.5)$$

Así

$$\sum_i^n (P_i, P_j)_y a_i^* = (\mathbf{u}, P_j)_y \quad j = 1, \dots, n \quad (2.4.6)$$

Con el producto interno definido como en (2.4.3) y la hipótesis inicial, donde se supone que son conocidos los valores de la función \mathbf{u} en $\mathbf{x}_I \in \overline{\Omega}$, $I = 1, \dots, N$, el miembro derecho de la ecuación (2.4.6) puede ser evaluado en cada punto $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$.

Teorema 2.4.1. LANCASTER Y SALKASKAS [1986] *La matriz $(P_i, P_j)_y$ es definida positiva $\forall \mathbf{y} \in \overline{\Omega}$ y los coeficientes $a_i(\mathbf{y})$ en (2.4.1) están unívocamente determinados.*

Demostración. La matriz $\mathbf{A}(\mathbf{y}) := (P_i, P_j)_y$ puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} P_1(\mathbf{x}_1) & P_1(\mathbf{x}_2) & \dots & P_1(\mathbf{x}_N) \\ P_2(\mathbf{x}_1) & P_2(\mathbf{x}_2) & \dots & P_2(\mathbf{x}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(\mathbf{x}_1) & P_n(\mathbf{x}_2) & \dots & P_n(\mathbf{x}_N) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} W_1(\mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_2(\mathbf{x}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_n(\mathbf{x}_N) \end{pmatrix} * \\ * \begin{pmatrix} P_1(\mathbf{x}_1) & P_2(\mathbf{x}_1) & \dots & P_n(\mathbf{x}_1) \\ P_1(\mathbf{x}_2) & P_2(\mathbf{x}_2) & \dots & P_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(\mathbf{x}_N) & P_2(\mathbf{x}_N) & \dots & P_n(\mathbf{x}_N) \end{pmatrix} := \mathbf{F}\mathbf{W}\mathbf{F}^T$$

Las filas de \mathbf{F} son linealmente independientes, por hipótesis (iii), así se tiene que el $\text{rango}(F) = n$ y el $\text{rango}(F^T) = n$. También W es definida positiva, ya que $W_I(\mathbf{y}) > 0$. Esto implica que \mathbf{A} es definida positiva. \square

Se puede reescribir (2.4.6) en la siguiente forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{y})\mathbf{a}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{u} \quad (2.4.7)$$

donde

$$A_{ij} = (P_i, P_j)_y \\ \mathbf{a}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} a_1(\mathbf{y}) \\ a_2(\mathbf{y}) \\ \vdots \\ a_n(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}) = \left[W_1(\mathbf{y})\mathbf{P}(\mathbf{x}_1) \mid W_1(\mathbf{y})\mathbf{P}(\mathbf{x}_1) \mid \cdots \mid W_1(\mathbf{y})\mathbf{P}(\mathbf{x}_1) \right]$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_I) = \begin{pmatrix} P_1(\mathbf{x}_I) \\ P_2(\mathbf{x}_I) \\ \vdots \\ P_n(\mathbf{x}_I) \end{pmatrix}$$

Así

$$a_k(\mathbf{y}) = \sum_I^N \sum_j^n A_{kj}^{-1} B_{jI}(\mathbf{y}) \mathbf{u}_I \quad (2.4.8)$$

Por (2.4.1),

$$\begin{aligned} (L_{\mathbf{y}}\mathbf{u})(\mathbf{x}) &= \sum_k^n \mathbf{a}_k(\mathbf{y}) P_k(\mathbf{x}) = \\ &= \sum_I^N \sum_j^n \sum_k^n P_k(\mathbf{x}) A_{kj}^{-1}(\mathbf{y}) B_{jI}(\mathbf{y}) \mathbf{u}_I = \\ &= \sum_I^N \Phi_I^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \end{aligned}$$

donde

$$\Phi_I^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := \sum_j^n \sum_k^n P_k(\mathbf{x}) A_{kj}^{-1} B_{jI}(\mathbf{y}) \quad (2.4.9)$$

Si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, podemos eliminar el superíndice \mathbf{y} y escribir

$$\Phi_I(\mathbf{x}) := \sum_j^n \sum_k^n P_k(\mathbf{x}) A_{kj}^{-1} B_{jI}(\mathbf{x}) \quad (2.4.10)$$

Hasta ahora, simplemente se ha construido la aproximación local, $L_{\mathbf{y}}\mathbf{u}$, de \mathbf{u} .

Definición 2.4.1. La función de aproximación global, $G\mathbf{u}$, de \mathbf{u} se define como

sigue,

$$(G\mathbf{u})(\mathbf{y}) := (L_{\mathbf{y}}\mathbf{u})(\mathbf{y}) = \sum_i^n a_i(\mathbf{y})P_i(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \bar{\Omega} \quad (2.4.11)$$

$$(G\mathbf{u})(\mathbf{y}) = \sum_I^N \Phi_I(\mathbf{y})\mathbf{u}_I \quad (2.4.12)$$

donde $\Phi_I(\mathbf{y})$ ha sido definida en (2.4.10).

Teorema 2.4.2. LANCASTER Y SALKAUSKAS [1986] Si $P_i, i = 1, \dots, n, \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ y $W_I, I = 1, \dots, N, \in \mathcal{C}^l(\Omega)$ entonces $(G\mathbf{u})(\mathbf{y})$ definida anteriormente $\in \mathcal{C}^{\min\{m,l\}}(\Omega)$

Demostración. Teniendo en cuenta (2.4.7), se tiene que $\mathbf{A}(\mathbf{y})\mathbf{a}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{y})\mathbf{u}$ así

$$\mathbf{A}_{,i}\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{a}_{,i} = \mathbf{B}_{,i}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{a}_{,i} = \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{B}_{,i}\mathbf{u} - 2\mathbf{A}_{,i}\mathbf{a}]$$

Dicha expresión tiene sentido por el Teorema (2.4.1), \mathbf{A}^{-1} existe y por la hipótesis de diferenciabilidad de $W_I, \mathbf{B}_{,i}$ y $\mathbf{A}_{,i}$ también existen. Las derivadas de orden superior de \mathbf{a} pueden ser calculadas tal y como se acaba de definir, por ejemplo,

$$\mathbf{a}_{,ii} = \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{B}_{,ii}\mathbf{u} - 2\mathbf{A}_{,i}\mathbf{a}_{,i} - \mathbf{A}_{,ii}\mathbf{a}]$$

cuya expresión tiene sentido si $l > 2$. Se concluye que $\mathbf{a} \in \mathcal{C}^l(\Omega)$. Entonces por la definición de $G\mathbf{u}$, la hipótesis de diferenciabilidad de P_i y todo lo anterior, se tiene que $G\mathbf{u} \in \mathcal{C}^{\min\{m,l\}}(\Omega)$ \square

Ejemplo 2.4.1. Podemos considerar el caso de $n = 1$ en (2.4.1).

Por la ecuación (2.4.6) se tiene que

$$a_1(y) = \frac{(1, u)_y}{(1, 1)_y}$$

Usando el producto interno discreto definido anteriormente en (2.4.3), la expresión anterior se puede calcular mediante,

$$a_1(y) = \frac{\sum_I^N W_I(y)u(x_I)}{\sum_J^N W_J(y)} := \sum_I^N v_I(y)u(x_I)$$

donde

$$v_I(y) = \frac{W_I(y)}{\sum_J^N W_J(y)} \quad (2.4.13)$$

La función de aproximación global Gu , en este caso, se llama *Interpolante de Shepard* y viene dado por,

$$(Su)(y) = \sum_I^N v_I(y)u(x_I) \quad (2.4.14)$$

Claramente $v_I(y)$ satisface

- (i) $0 < v_I(y) < 1$
- (ii) $\sum_I^N v_I(y) = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

Las funciones de forma resultantes de la aproximación descrita se muestran en las figuras 2.2 a 2.5. En ellas se considera el segmento $[0, 1]$ discretizado con once nodos equiespaciados. En la figura 2.2(a) se representan las once funciones de forma de los nodos, suponiendo que el soporte de cada función de forma comprende en su interior a otros dos nodos. Este hecho suele indicarse mediante un parámetro α de valor $\alpha = \text{sop}(\phi_I)/d_I$, donde d_I representa la separación nodal. Las derivadas de estas funciones de forma se presentan en la figura 2.2(b). Si el soporte se amplía, tomando por ejemplo $\alpha = 3$, se obtienen las funciones de la figura 2.3. Si lo que se amplía es grado de los polinomios de la base, haciéndolo cuadrático, por ejemplo, se obtienen las funciones de la figura 2.4. Finalmente, en la figura 2.5 se representan todas las funciones de forma de los once nodos en este último caso.

Teorema 2.4.3. *Si $W_I(\mathbf{y}) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, entonces la colección de funciones $v_I(\mathbf{y})$ definidas anteriormente en (2.4.13) representa una partición de la unidad.*

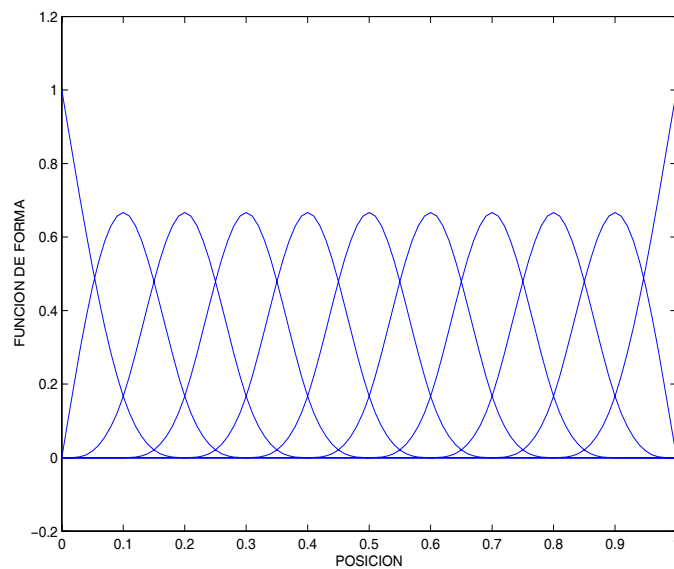
Demostración. Inmediata. □

A continuación se muestran algunas de las propiedades que presenta este método.

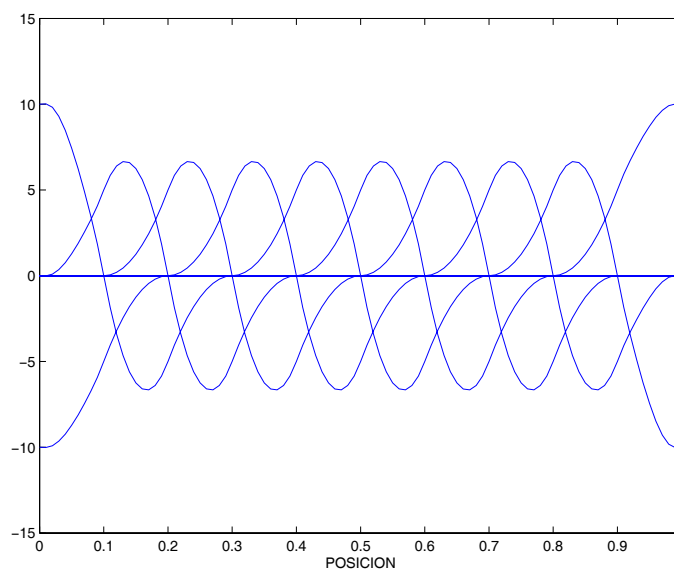
Propiedades del MMCM

Consistencia

Teorema 2.4.4. *La aproximación por Mínimos Cuadrados Móviles es consistente de orden k si la base polinomial es completa hasta el orden k .*

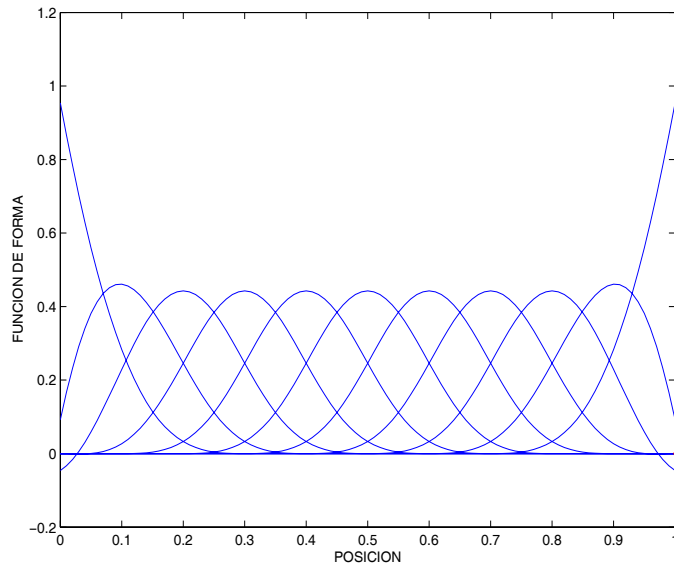


(a)

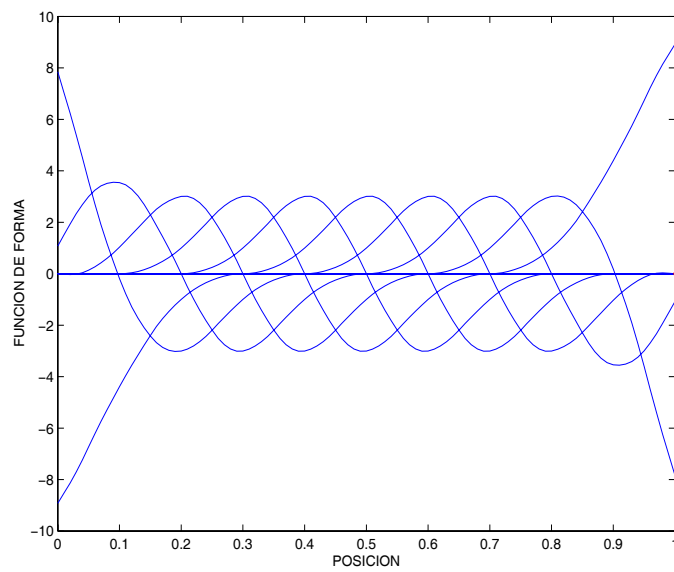


(b)

Figura 2.2: Funciones de forma (a) y sus derivadas (b) construidas con una base lineal y soporte $\alpha = 2,0$.



(a)



(b)

Figura 2.3: Funciones de forma (a) y sus derivadas construidas con una base lineal y soporte $\alpha = 3,0$.

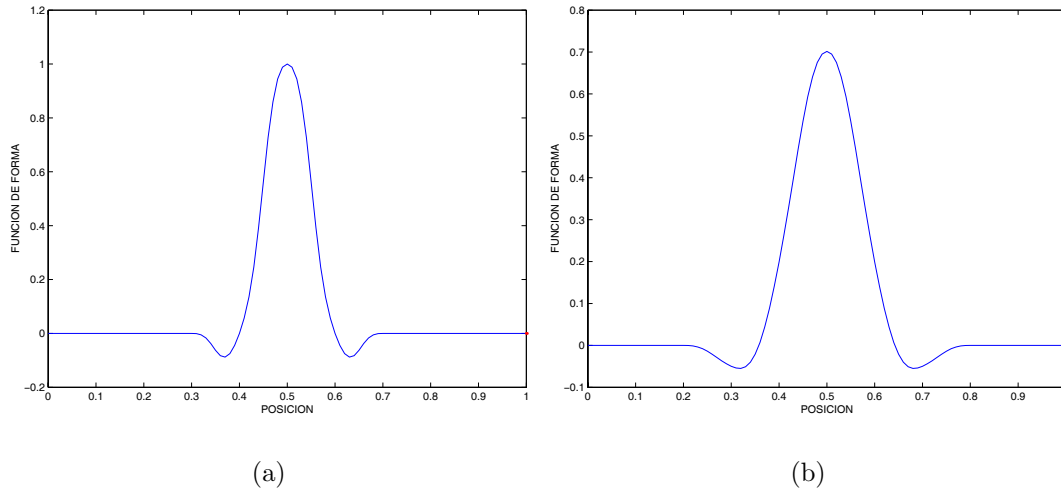


Figura 2.4: Función de forma del nodo central con base cuadrática y soportes (a) $\alpha = 2,0$ y (b) $\alpha = 3,0$

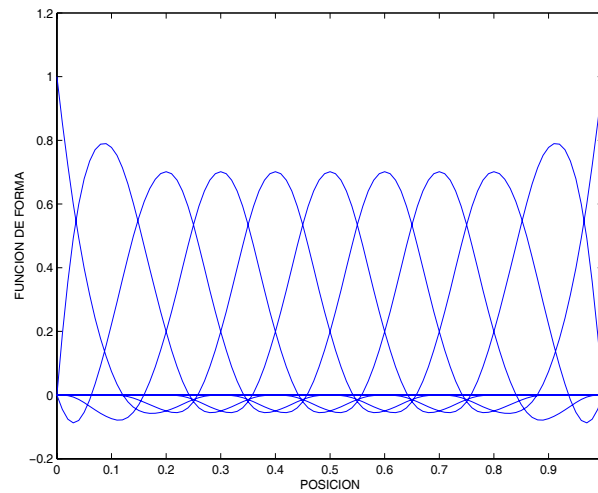


Figura 2.5: Conjunto de funciones de forma con base cuadrática y $\alpha = 3,0$.

Demostración. KRONGAUZ [1996] El funcional definido en la ecuación (2.4.4) y que sirve para determinar los coeficientes incógnita del problema es definido positivo si se respeta la condición $W(\mathbf{x}, h) > 0$. Por tanto, su mínimo será mayor o igual a cero.

Supongamos un campo esencial a reproducir dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i \alpha_i p_i(\mathbf{x}) \quad (2.4.15)$$

entonces, si hacemos $a_i(\mathbf{x}) = \alpha_i$ el funcional se anulará, tomando entonces su valor mínimo. Si la base $p_i(\mathbf{x})$ contiene todos los términos hasta el orden k , se obtiene que la aproximación por Mínimos Cuadrados Móviles es consistente de orden k . Pero además puede concluirse que cualquier función que aparece en la base puede ser reproducida exactamente. Esto ha sido aprovechado por BELYTSCHKO ET AL. [1995] para incluir en la aproximación funciones singulares que reproducen el campo de deformaciones en el frente de una grieta, por ejemplo. \square

Condiciones de contorno esenciales

Como ya se ha comentado en el apartado anterior, una de las mayores dificultades en la implementación de métodos sin malla se refiere a la imposición de condiciones de contorno esenciales. Tanto en el *RKPM* como en el *MMCM*, la aproximación no pasa por los valores nodales. Dicho de otra forma, no cumple la propiedad de la Delta de Dirac:

$$\phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ} \quad (2.4.16)$$

Como consecuencia, no basta con sustituir en el sistema discreto de ecuaciones del método de Galerkin aquellos valores nodales que son conocidas, ya que ello no asegura que la aproximación tome ese valor en el nodo. Además, —y esto pocas veces se pone de manifiesto— no bastaría con que la aproximación tome el valor prescrito en el nodo (basta con usar multiplicadores de Lagrange o métodos de penalización para lograrlo, tal y como se ha comentado), sino que el hecho de que nodos interiores tengan influencia (esto es, su soporte intersekte) en el contorno, hace que no se pueda lograr una interpolación estricta en el contorno, solo dependiente de los nodos del mismo.

Integración numérica

En la mayoría de los métodos sin malla basados en el método de Galerkin se utiliza una malla de fondo para realizar la integración numérica de la forma débil del problema. Esto no supone, en general, una pérdida del carácter de método sin malla, puesto que esta malla no tiene las limitaciones de forma y regularidad que necesita la de Elementos Finitos, al construirse sobre ella también la aproximación. Sin embargo, el hecho de que esta malla no coincida frecuentemente con el soporte de la función de forma y a la vez el que ésta sea una función racional y no polinómica, hace que se produzca un nivel de error relativo en la integración numérica que, como regla general, no baja de 10^{-7} por más que se refine la malla o se aumente el número de puntos de integración, como se puso de manifiesto en GONZÁLEZ ET AL. [2003e].

Coste Computacional

La función de aproximación global por mínimos cuadrados móviles $G\mathbf{u}$ definida anteriormente, puede ser demasiado cara, computacionalmente hablando. Para cada punto \mathbf{y} , hay que resolver un nuevo sistema de ecuaciones. Equivalentemente, se puede también ortonormalizar las funciones P_i con respecto al producto interno ponderado, pero, como antes, la ortonormalización debe de hacerse en cada punto \mathbf{y} . En la práctica, los pesos W_I están definidos como traslaciones de una función simple W , es decir,

$$W_I(\mathbf{y}) := W(\mathbf{y} - \mathbf{x}_I) \quad (2.4.17)$$

siendo W tal que satisface las siguientes condiciones:

- (i) El soporte de W_I , $sop(W_I)$, es una disco abierto (una bola) de radio ρ centrada en el origen.
- (ii) Para cualquier $\mathbf{y} \in \bar{\Omega}$ existen índices $I_1, \dots, I_k, k \geq n$, dependientes de \mathbf{y} , tales que

$$\mathbf{y} \in \bigcap_{j=1}^k sop(W_{I_j})$$

y $\mathbf{x}_{I_1}, \dots, \mathbf{x}_{I_k}$ contiene un subconjunto de n puntos, para los cuales $\{P_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente.

La condición (i) anterior implica que los únicos puntos que intervienen en el cálculo de $(G\mathbf{u})(\mathbf{y})$ son aquellos que satisfacen $|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}| < \rho$ y, en consecuencia, sólo algunas de las columnas de la matriz \mathbf{B} definida en (2.4.7) no serán nulas.

La condición (ii) se impone para garantizar el buen comportamiento del sistema A_{ij} definido en (2.4.7) para todo $\mathbf{y} \in \bar{\Omega}$. Nótese que una condición necesaria para que se cumpla (ii) es que $k \geq n$, estando k definida en (ii). Esta condición es necesaria pero no es suficiente para garantizar (ii). Este es un factor que limita en la práctica el uso de interpolantes por mínimos cuadrados móviles, debido a que las funciones de base $\{P_i\}_{i=1}^n$, son polinomios de bajo orden, especialmente en $2D$ y en $3D$.

2.5 Método de Elementos Difusos

Se puede definir este método como una generalización de la técnica de interpolación por Elementos Finitos. Fue propuesta por NAYROLES ET AL. [1992]. En ese artículo no se menciona para nada el método de Mínimos Cuadrados Móviles, pero el procedimiento descrito por Villon *et al.* es exactamente el mismo que el *MMCM*.

Construcción de la aproximación

En el *MED* (su nomenclatura en inglés es *DEM*), una función $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ está localmente aproximada alrededor de un punto \mathbf{y} mediante

$$\mathbf{u}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{y})P_i(\mathbf{x}) \quad (2.5.1)$$

donde $\{P_i\}_{i=1}^n$ es una base de polinomios. Nótese que la expresión anterior es precisamente la ecuación (2.4.1). Como en el *MMCM*, los coeficientes a_i se encuentran minimizando el siguiente funcional,

$$J_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}) = \sum_{I=1}^N W_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_I) \left[\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) - \sum_i^n a_i P_i \right]^2$$

el cual es el mismo que en (2.4.4), excepto porque en (2.4.4) se usa $W_I(\mathbf{y})$ en vez de $W_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_I)$, es decir, se utiliza una “derivada difusa”, que converge a la derivada real. Pero en la práctica, las funciones peso utilizadas cumplen que $W_I(\mathbf{y}) = W_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_I)$, es decir, ambos funcionales son idénticos.

Además, como en el *MMCM*, la función de aproximación global se obtiene haciendo $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ en (2.5.1) y escribiéndolo simplemente como $\mathbf{u}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x})P_i(\mathbf{x}) \quad (2.5.2)$$

Esto es equivalente a la definición de $G\mathbf{u}$ dada en (2.4.11). Como en la sección 2.4, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) &= \sum_I^N \sum_j^n \sum_k^n P_k(\mathbf{x}) A_{kj}^{-1}(\mathbf{y}) B_{jI}(\mathbf{y}) \mathbf{u}_I = \\ &= \sum_I^N \Phi_I^{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I\end{aligned}$$

Si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se tiene la aproximación global, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, escrito en términos de las funciones Φ_I

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_I^N \Phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (2.5.3)$$

Nota 2.5.1. Villon *et al.* presentaron diversos usos para la aproximación difusa. Entre ellos estaba la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias como de ecuaciones en derivadas parciales, por lo que lo llamaron Método de Elementos Difusos, *MED* (*DEM* en inglés). La idea es usar las funciones de forma Φ_I como funciones de base de un subespacio de dimensión finita de $H^1(\Omega)$, por ejemplo, para posteriormente usar un método de Galerkin para encontrar una solución aproximada de la *ODE* o *PDE* en este subespacio. Nótese que por el Teorema 2.4.2, $\Phi_I \in H^1(\Omega)$ y se puede construir un subespacio de $H^1(\Omega)$ usando dichas funciones.

2.6 Element Free Galerkin Method

BELYTSCHKO ET AL. [1994] publicaron un método sin malla similar al método de elementos difusos. La característica esencial del método, llamado Element-Free Galerkin Method (*EFGM*) es el uso de una malla auxiliar, compuesta simplemente por elementos cuadrados, que cubren el dominio del problema completamente. Esta malla de fondo se usa en el *EFGM* como soporte para el cálculo de las cuadratura numérica (véase BELYTSCHKO ET AL. [1993]).

Las funciones globales Φ_I construidas usando el Método de Mínimos Cuadrados Móviles no satisfacen la siguiente condición

$$\Phi_I(x_J) = \delta_{IJ} \quad I, J = 1, \dots, N$$

Este factor debe ser tenido en cuenta a la hora de imponer condiciones de contorno Dirichlet no homogéneas, tal como se ha comentado repetidamente. NAYROLES ET AL. [1992] suponen que dicha condición se satisface. BELYTSCHKO ET AL.

[1994] usan multiplicadores de Lagrange para imponer las condiciones de contorno esenciales y muestran diversos ejemplos numéricos en los cuales las condiciones de contorno se satisfacen exactamente.

Nota 2.6.1. Otra importante diferencia entre el *MED* y el *EFGM* es que en el primero, las funciones globales Φ_I se calculan mediante,

$$\Phi_{I,i}(\mathbf{x}) := \sum_j^n \sum_k^n P_{k,i}(\mathbf{x}) A_{kj}^{-1} B_{jI}(\mathbf{x})$$

Nótese que no hay dependencia de los coeficientes de la aproximación, a_i definidos en (2.5.1) con respecto a \mathbf{y} . En el *EFGM* sí hay dependencia y las derivadas de Φ_I se calculan como sigue

$$\begin{aligned} \Phi_{I,i}(\mathbf{x}) := & \sum_j^n \sum_k^n P_{k,i}(\mathbf{x}) A_{kj}^{-1} B_{jI}(\mathbf{x}) + \\ & + \sum_j^n \sum_k^n \left(P_k(\mathbf{x}) A_{kj}^{-1}(\mathbf{x}) \left[\sum_l^n \sum_m^n A_{jl,i}(\mathbf{x}) A_{lm}^{-1}(\mathbf{x}) B_{mI}(\mathbf{x}) \right] \right) \end{aligned}$$

BELYTSCHKO ET AL. [1994] han usado con éxito el *EFGM* para resolver diversos problemas de la mecánica de sólidos y fluidos.

2.6.1. Problemática del método *EFGM*

El principal problema de este método (y también del *MED*) es su alto coste computacional. Además, satisfacer la condición (ii) de la Sección 2.4.1 es difícil cuando la densidad de la nube de nodos que componen el dominio es muy irregular o el orden de aproximación local es superior al cuadrático.

De nuevo, la imposición de condiciones de contorno esenciales es otro de los problemas más graves del *EFGM*. Aunque existen diversos métodos para forzar el valor de la aproximación en el contorno, como pueden ser los métodos de penalización o de multiplicadores de Lagrange, éstos no logran sino una satisfacción nodal de las condiciones de contorno esenciales. El problema fundamental, que por el momento no ha sido evitado, es la influencia de los nodos interiores en la aproximación resultante en el contorno esencial.

2.7 Reproducing Kernel Particle Method

LIU Y CHEN [1995] y LIU ET AL. [1995] han desarrollado un método que surge como resultado de la imposición de la condición de consistencia lineal sobre la aproximación original del *SPH*. La construcción del mismo se resume a continuación.

2.7.1. Construcción de la aproximación

Si se quiere que la función de forma del método reproduzca un campo lineal en la variable esencial, se le debe exigir, en el caso unidimensional:

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{1} dy = \mathbf{1} \quad (2.7.1)$$

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} dy = \mathbf{x} \quad (2.7.2)$$

La ecuación (2.7.1) es equivalente a la condición de normalidad exigida en (2.3.1). A partir de (2.7.1), se obtiene que

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} dy = \mathbf{x} \quad (2.7.3)$$

y restando (2.7.2) de (2.7.3) se obtiene

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dy = \mathbf{0} \quad (2.7.4)$$

Esta última condición supone exigir a la función de forma que sea simétrica respecto al origen, condición que también cumple normalmente la función de forma del *SPH*. Sin embargo, esta condición deja de cumplirse en la forma discreta del método.

En este caso, dependerá de la distribución de los nodos o partículas. En forma discreta, por lo general:

$$\sum_{I=1}^{NP} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) \Delta V_I \neq \mathbf{1} \quad (2.7.5)$$

$$\sum_{I=1}^{NP} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) \Delta V_I \neq \mathbf{0} \quad (2.7.6)$$

donde NP representa el número de partículas. Para que las condiciones anteriores se cumplan en la forma discreta del método, se añade al núcleo una función de corrección:

$$\tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, \mathbf{x}) = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, \mathbf{x})W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, h) \quad (2.7.7)$$

donde $C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, \mathbf{x})$ representa la función de corrección, que detalladamente tendría la siguiente estructura:

$$C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, \mathbf{x}) = a_0(\mathbf{x}, h) + a_1(\mathbf{x}, h)\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|}{h} + a_2(\mathbf{x}, h)\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|}{h}\right)^2 + \dots \quad (2.7.8)$$

donde a_0, \dots, a_n son ciertos coeficientes a determinar. Para ello, se parte del desarrollo en serie de Taylor de una función (supuesta unidimensional por simplicidad):

$$f(\mathbf{x}_I) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\left(\frac{\mathbf{x}_I - \mathbf{x}}{h}\right)h + \frac{f''(\mathbf{x})}{2!}\left(\frac{\mathbf{x}_I - \mathbf{x}}{h}\right)^2h^2 + \dots \quad (2.7.9)$$

Si ahora se aproxima la función f de acuerdo con la ecuación (2.3.1), se tiene:

$$\begin{aligned} f^h(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{NP} \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, \mathbf{x})f_I\Delta\mathbf{x}_I = \\ &= \left(\sum_{I=1}^{NP} \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, \mathbf{x})\Delta\mathbf{x}_I\right)f(\mathbf{x}) - \\ &- \left(\sum_{I=1}^{NP} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_I}{h}\right)\tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, \mathbf{x})\Delta\mathbf{x}_I\right)f'(\mathbf{x})h + \dots + \\ &+ \left(\sum_{I=1}^{NP} (-1)^n \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_I}{h}\right)^n \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, \mathbf{x})\Delta\mathbf{x}_I\right)\frac{f^n(\mathbf{x})}{n!}h^n + \mathcal{O}(h^{n+1}) \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

De esta forma, para obtener consistencia de orden n —esto es, para que se reproduzcan campos polinomiales hasta el orden n —, se deben satisfacer las siguientes

relaciones, en el caso unidimensional:

$$M_0(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, \mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}_I = 1 \quad (2.7.11)$$

$$M_1(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_I}{h} \right) \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, \mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}_I = 0 \quad (2.7.12)$$

$$\vdots \quad (2.7.13)$$

$$M_n(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_I}{h} \right)^n \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I, \mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}_I = 0 \quad (2.7.14)$$

donde a las expresiones $M_i(\mathbf{x})$ se las denomina *momentos* de la aproximación. De esta forma, los coeficientes a_i se pueden determinar a partir del sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} m_0(\mathbf{x}) & m_1(\mathbf{x}) & \dots & m_n(\mathbf{x}) \\ m_1(\mathbf{x}) & m_2(\mathbf{x}) & \dots & m_{n+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n(\mathbf{x}) & m_{n+1}(\mathbf{x}) & \dots & m_{2n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(\mathbf{x}, h) \\ a_1(\mathbf{x}, h) \\ \vdots \\ a_n(\mathbf{x}, h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.15)$$

Debe tenerse en cuenta que, como se desprende de la ecuación (2.7.15), el *RKPM* exige realizar una inversión de matriz en cada nodo. Lógicamente, la “conectividad” y por tanto el tamaño de esa matriz cambia al evolucionar los nodos en grandes desplazamientos, lo que complica significativamente su aplicación.

2.7.2. Problemática del método *RKPM*

La problemática del *RKPM*, excepción hecha de la inestabilidad o de la consistencia lineal del método, es exactamente la misma que la del *SPH* en lo relativo a imposición de condiciones esenciales de contorno. Como se se está observando, la mayoría de los métodos sin malla la comparten.

2.8 Método de Partición de la Unidad

A mediados de los 90, surge el método de Partición de la Unidad (*PUM* o *PUFEM*, BABUŠKA Y MELENK [1996], BABUŠKA Y MELENK [1997]), tratando de incluir espacios de aproximación que contengan potencialmente a la solución del problema. Cuando se tiene cierta información acerca de la solución de un problema,

parece lógico intentar incluir dicha información en el espacio de funciones de forma del método de Galerkin. Una de las características que los autores destacan del método es la capacidad de incluir este conocimiento previo de la solución del problema en el espacio de aproximación y la facilidad que ofrece para construir espacios con un grado de regularidad alto (llegando incluso a funciones \mathcal{C}^∞), antes que el carácter de método sin malla.

En el método de los Elementos Finitos la aproximación se realiza por medio de polinomios a trozos, continuos a lo largo del contorno entre elementos. Se sabe que para ciertos tipos de problemas (problemas con solución altamente oscilatoria, por ejemplo), otros espacios (los denominamos V_i) pueden ofrecer mejores soluciones que los polinomios. La forma de conseguir que el espacio global V presente el grado de continuidad deseado se basa en el uso de una partición de la unidad.

Sea $\{\Omega_i\}$ un cubrimiento sobre un dominio Ω , de forma que

$$\bigcup_i \Omega_i = \Omega$$

y que

$$\bigcap_i \Omega_i \neq \emptyset$$

(Veáse por ejemplo la figura 2.1).

Sea $\{\phi_i\}$ una partición de la unidad definida sobre dicho cubrimiento del dominio $\{\Omega_i\}$, es decir

$$\text{supp } \phi_i \subset \overline{\Omega_i} \quad \forall i \tag{2.8.1}$$

$$\sum_i \phi_i \equiv 1 \quad \text{en } \Omega \tag{2.8.2}$$

En cada uno de esos Ω_i se define un espacio de funciones V_i asociado a él, el cual tiene las propiedades de aproximación que se buscan en esa parte del dominio. Por lo tanto, el espacio de aproximación global estará formado en el *PUM* por la combinación

$$V = \sum_i \phi_i V_i.$$

Introducimos a continuación el concepto de *partición de la unidad de clase* (M, C_∞, C_G) para poder desarrollar las afirmaciones anteriores.

Definición 2.8.1. Considérese el recubrimiento definido en el párrafo anterior y

que cumple que

$$\exists M \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ card}\{i / \mathbf{x} \in \Omega_i\} \leq M$$

Si $\{\varphi_i\}$ es una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{\Omega_i\}$ y que satisface

$$\text{sop}\varphi_i \subset \bar{\Omega}_i \quad \forall i, \quad (2.8.3)$$

$$\sum_i \varphi_i \equiv 1 \text{ en } \Omega, \quad (2.8.4)$$

$$\|\varphi_i\|_{L_\infty} \leq C_\infty, \quad (2.8.5)$$

$$\|\nabla\varphi_i\|_{L_\infty} \leq \frac{C_G}{\text{diám}(\Omega_i)} \quad (2.8.6)$$

donde C_∞ y C_G son dos constantes, entonces $\{\varphi_i\}$ se denomina una partición de la unidad de clase (M, C_∞, C_G) subordinada al recubrimiento $\{\Omega_i\}$. Si las funciones $\{\varphi_i\}$ son, además de clase C^m , se dice que la partición de la unidad también lo es.

Definición 2.8.2. Sea $\{\Omega_i\}$ un recubrimiento del dominio del problema, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, y sea $\{\varphi_i\}$ una partición de la unidad de clase (M, C_∞, C_G) . Sea $V_i \in H^1(\Omega_i \cap \Omega)$ un conjunto de funciones dado. El espacio de aproximación del PUM (BABUŠKA Y MELENK [1996], BABUŠKA Y MELENK [1997]) se define como:

$$V := \sum_i \varphi_i v_i \quad v_i \in V_i \subset H^1(\Omega) \quad (2.8.7)$$

Teorema 2.8.1. Sean $\{\Omega_i\}$, $\{\varphi_i\}$ y $\{V_i\}$ los elementos descritos en las definiciones anteriores y sea, como es habitual, \mathbf{u} , la función a aproximar. Se supone que los espacios de aproximación local V_i cumplen que en cada $\Omega_i \cap \Omega$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_i\|_{L_2} \leq \epsilon_1(i), \quad (2.8.8)$$

$$\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i)\|_{L_2} \leq \epsilon_2(i) \quad (2.8.9)$$

entonces la función construida como

$$\mathbf{u}_{PU} = \sum_i \varphi_i \mathbf{v}_i \in V \subset H^1(\Omega) \quad (2.8.10)$$

satisface las siguientes propiedades:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{PU}\|_{L_2} \leq \sqrt{M} C_\infty \left(\sum_i \epsilon_1^2(i) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.8.11)$$

$$\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{PU})\|_{L_2} \leq \sqrt{2M} \left(\sum_i \left(\frac{C_G}{\text{diám}(\Omega_i)} \right)^2 \epsilon_1^2(i) + C_\infty^2 \epsilon_2^2(i) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.8.12)$$

Demostración. BABUŠKA Y MELENK [1996] Se demuestra solamente la segunda de las propiedades, pues la primera se demostraría de una forma totalmente similar. Dado que las funciones φ_i forman una partición de la unidad, se tiene que

$$\mathbf{u} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{u} = \left(\sum_i \varphi_i \mathbf{u} \right) \quad (2.8.13)$$

y entonces

$$\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{PU})\|_{L_2}^2 = \|\nabla \sum_i \varphi_i(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i)\|_{L_2}^2 \quad (2.8.14)$$

$$\leq 2 \left\| \sum_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \right\|_{L_2}^2 + 2 \left\| \sum_i \varphi_i \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \right\|_{L_2}^2 \quad (2.8.15)$$

Dado que existen como máximo M de Ω_i que, por suposición, se superponen en un determinado punto $x \in \Omega$, las sumas $\sum_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i)$ y $\sum_i \varphi_i \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i)$ tienen como máximo M términos para cada \mathbf{x} . Por tanto, debe darse que

$$\left| \sum_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \right|^2 \leq M \sum_i |\nabla \varphi_i(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i)|^2 \quad (2.8.16)$$

$$\left| \sum_i \varphi_i \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \right|^2 \leq M \sum_i |\varphi_i \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i)|^2 \quad (2.8.17)$$

De esta forma, dado que $\text{supp} \varphi_i \subset \Omega_i$,

$$2 \left\| \sum_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2 \left\| \sum_i \varphi_i \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \quad (2.8.18)$$

$$2M \sum_i \left\| \nabla \varphi_i(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2M \sum_i \left\| \varphi_i \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \quad (2.8.19)$$

$$2M \sum_i \left\| \nabla \varphi_i(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \right\|_{L_2(\Omega \cap \Omega_i)}^2 + 2M \sum_i \left\| \varphi_i \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \right\|_{L_2(\Omega \cap \Omega_i)}^2 \leq \quad (2.8.20)$$

$$2M \sum_i \left(\frac{C_G^2}{\text{diám}(\Omega_i)^2} \epsilon_1^2(i) + C_\infty^2 \epsilon_2^2(i) \right) \quad (2.8.21)$$

como queríamos demostrar. \square

Nota 2.8.1. El teorema anterior establece que la aproximación construida mediante $V = \sum_i \varphi_i V_i$ adquiere las características de aproximación de las funciones \mathbf{v}_i y las características de continuidad de la partición de la unidad. Esta es, sin duda, la mayor aportación de Babuška y Melenk al campo de los métodos sin malla. Puede verse, además, que los Elementos Finitos constituyen una partición de la unidad y que si la condición (2.8.6) es respetada —condición del ángulo mínimo de la malla, desarrollada por BABUŠKA Y AZIZ [1976]— entonces el *MEF* es susceptible de ser enriquecido, añadiéndole los correspondientes espacios de aproximación local (“base extrínseca” en nomenclatura de Belytschko). Esto dará lugar a un método denominado método de los Elementos Finitos Generalizado (*GFEM*).

2.8.1. Construcción del *PUM*

La forma mas general del método de Partición de la Unidad puede ser:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_I \Phi_I^0(\mathbf{x}) \sum_j \beta_{jI} p_j(\mathbf{x}) \quad (2.8.22)$$

donde β_{jI} son las incógnitas del problema y p_j es una base que suele incluir monomios hasta un cierto grado, además de las funciones V_i comentadas anteriormente, y que son apropiadas para el problema en estudio. Como ejemplo de base p véase BABUŠKA Y MELENK [1996], KRONGAUZ [1996], para la ecuación de Helmholtz en una dimensión se podría considerar

$$p^T = [1, x, x^2, \dots, x^k, \sinh nx, \cosh nx] \quad (2.8.23)$$

Las funciones Φ_I^0 constituyen una partición de la unidad, esto es, $\sum_I \Phi_I^0 = 1$.

2.8.2. Problemática del *PUM*

También en el *PUM* aparecen problemas relacionados con la imposición de condiciones de contorno esenciales. Aunque es posible lograr funciones de forma estrictamente interpolantes (y dejando a un lado el caso particular de uso de los Elementos Finitos como partición de la unidad), esto no basta para lograr una imposición apropiada de condiciones de contorno esenciales. Como ya se ha indicado, esto se debe al hecho de que el valor de la función aproximada en un punto no nodal

depende no sólo del valor que adquiriera en los nodos del contorno, sino también del que tenga en algunos nodos del interior del dominio (precisamente de aquellos cuya función de forma asociada contiene en su soporte a esos puntos).

2.9 Método de nubes h - p

El método de nubes h - p podría ser catalogado dentro de los métodos de partición de la unidad, pero teniendo en cuenta una particularidad, y es que construyen las familias de aproximación a base de multiplicar una partición de la unidad, que se obtiene por mínimos cuadrados móviles, por polinomios u otra clase de función apropiada para el problema en estudio. Esto introduce la posibilidad de aumentar el grado de polinomios que forman las funciones de forma (adaptatividad p), a la que se le puede añadir también la introducción de nuevos nodos (adaptatividad h). Las familias resultantes conservan la propiedad de la partición de la unidad.

2.9.1. Construcción del método de nubes h - p

DUARTE Y ODEN [1996] han elaborado un método, llamado nubes h - p , en el que forman la partición de la unidad a partir de una función de forma de mínimos cuadrados móviles de orden k .

Su formulación podría escribirse como:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i^k(x) \left(u_i + \sum_{j=1}^q b_{ij} q_j(x) \right) \quad (2.9.1)$$

donde la funciones $q_j(x)$ es una base de monomios de orden mayor que k .

Otra forma de expresar (2.9.1), donde claramente se aprecia el aumento del orden del polinomio desde k hasta p , se muestra a continuación:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \left(\Phi_i^k(x) u_i + \Phi_i^k(x) \begin{pmatrix} x^{k+1} & x^{k+2} & \dots & x^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{iq} \end{pmatrix} \right)$$

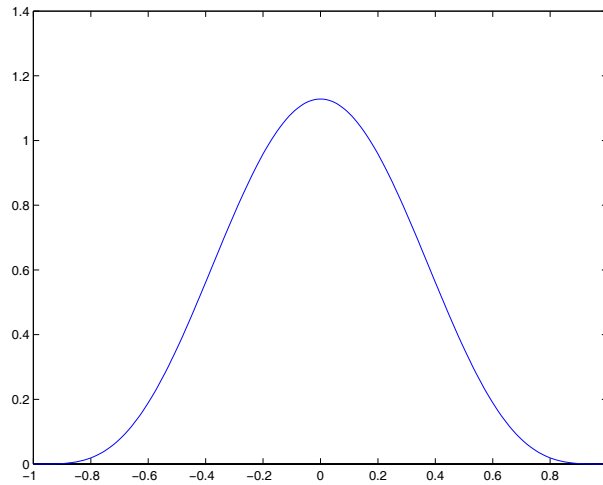


Figura 2.6: Núcleo W empleado en las nubes h - p .

donde $q = p - k$ y b_{il} con $l = 1, 2, \dots, q$, son parámetros adicionales de la aproximación. Para cada nodo en el que se aumenta el grado del polinomio, se introducen q grados de libertad adicionales, los cuales se corresponden con los parámetros adicionales b_{il} , siendo en total $p - k + 1$ parámetros por nodo ($p - k$ debidos a los b_{il} , y uno más por el parámetro u_i).

Para la construcción de una partición de la unidad en el método de las nubes $h - p$, Duarte y Oden emplean precisamente la técnica de aproximación mediante mínimos cuadrados móviles. Así, si consideramos una función peso, que hemos venido denominando $W(y - x_i)$ y que es de clase C_0^∞ , se definen las funciones Φ_i como:

$$\Phi_i(x) = P^T(x)A^{-1}B_i(x) \quad (2.9.2)$$

donde $P = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes y los términos A y B se definen según la expresión (2.4.7).

Nota 2.9.1. La construcción del método de nubes h - p descrita anteriormente pone de manifiesto, además, que es posible construir una aproximación de cualquier grado de consistencia a partir de los interpolantes de Shepard descritos en la ecuación (2.4.13) y, por tanto, sin la necesidad de invertir una matriz en cada nodo.

Nota 2.9.2. BELYTSCHKO ET AL. [1998a] distinguen, hablando del método de las nubes h - p , entre una base *intrínseca* —la propia del *MMCM*— y otra *extrínseca*, es decir, la que conforma finalmente la familia de funciones de aproximación que Oden denomina $\mathcal{F}_N^{k,p}$. La gran ventaja de la adición de la base extrínseca respecto a la formulación estándar del *Element Free Galerkin* es la posibilidad de implementar

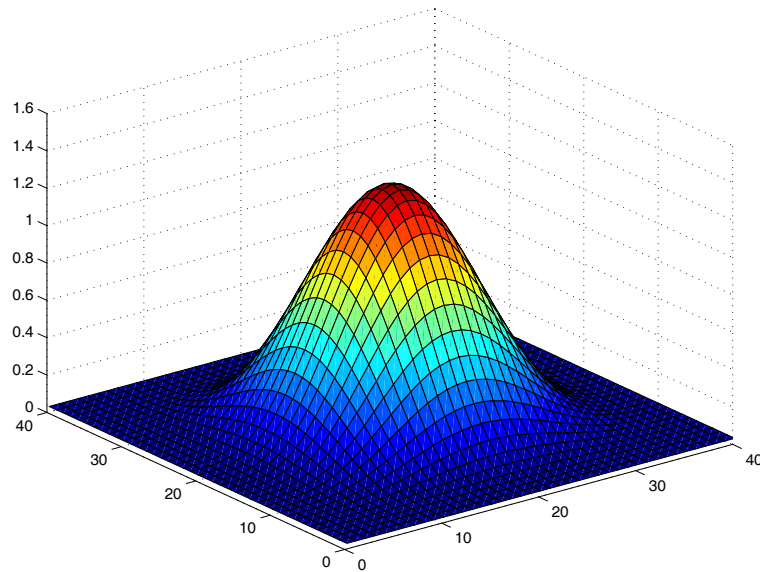


Figura 2.7: Núcleo W en 2D obtenido por producto tensorial y, por tanto, con soporte rectangular.

la adaptatividad p . De otro modo, la introducción de términos de distinto orden en la base intrínseca llevaría consigo la inclusión de una discontinuidad en el campo esencial.

2.10 Método de Petrov-Galerkin local

Una de las últimas aportaciones relevantes a los métodos sin malla ha sido llevada a cabo por ATLURI ET AL. [1999] y por ATLURI Y ZHU [2000], constituyendo lo que han denominado Método de Petrov-Galerkin Local (*Meshless Local Petrov-Galerkin method, MLPG*). Fue propuesto para resolver problemas de potencial lineales y no lineales. En esencia no aporta novedades en lo que respecta al método de aproximación —que vuelve a utilizar mínimos cuadrados móviles—, pero sí en el tratamiento de la forma débil del problema de valores en el contorno. Usa una forma débil local simétrica sobre un subdominio $\Omega_I \subset \Omega$, como formulación, y la aproximación por mínimos cuadrados móviles para desarrollar un verdadero método sin malla. Este método impone las condiciones de contorno esenciales mediante penalización.

En el método de Petrov-Galerkin local, en vez de elegir las funciones test que denominamos v_i iguales a las funciones que se usan para aproximar la función que denominamos u_i (Galerkin), se eligen las funciones u_i y v_i de dos espacios distintos.

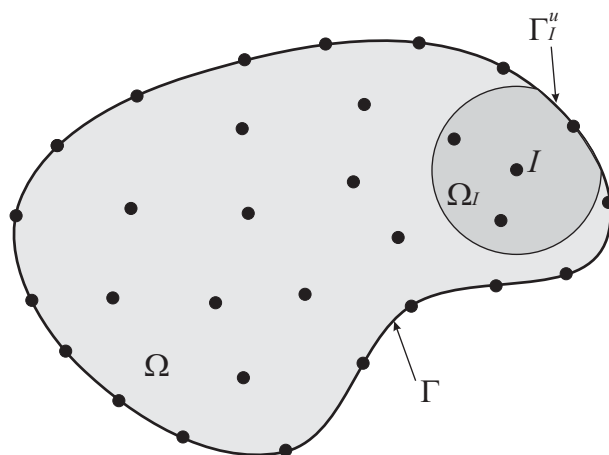


Figura 2.8: Construcción de la forma débil del problema en el método local de Petrov-Galerkin.

En concreto, las funciones test no necesitan tener un valor nulo en los puntos de la frontera donde existen condiciones de contorno esenciales. Por lo general, las funciones u_i se aproximan por mínimos cuadrados móviles, y las funciones test v_i se elegirán de forma distinta a partir de funciones conocidas.

Usualmente, se eligen las funciones test v_i de forma que se anulen en la frontera Γ_{Ω_I} del subdominio. Esto se consigue fácilmente usando la función de peso de la aproximación por mínimos cuadrados móviles también para la función test v_i , pero cambiando el radio de influencia r_i de la función peso que se use, por el radio r_0 del dominio local Ω_I .

Allí donde los soportes de las funciones de forma intersectan al contorno del dominio, $\Gamma_I^u = \Omega \cap \Gamma_u$, se hace necesario integrar sobre soportes de geometrías a menudo irregulares (figura 2.8). Esta característica, presentada como la mayor ventaja del método por no ser necesaria la construcción de celdas de integración como en la forma estándar del *EFGM* o en el *RKPM*, proporciona mucha mayor complejidad a la integración numérica.

Por lo demás, el *MLPG* muestra niveles de exactitud y convergencia similares en todos los casos al *EFGM* o al *RKPM*.

2.11 Método de Esferas Finitas

Recientemente, DE Y BATHE [2000] han desarrollado un nuevo esquema de método sin malla, el método de esferas finitas, para la solución de problemas de valores en el contorno sobre dominios complejos.

En esta técnica, la discretización está planteada mediante funciones con soporte compacto sobre esferas de dimensión n , y la forma débil de Galerkin de las ecuaciones diferenciales de gobierno están integradas usando reglas especiales de integración numérica.

Construcción de la aproximación

Dada una nube de N puntos que determinan el dominio Ω . A cada nodo de la nube se le asocia una esfera con centro en el propio nodo y un cierto radio, $\mathbf{B}(\mathbf{x}_I, r_I)$, tal que la unión de todas las esferas forman un recubrimiento del dominio, de tal forma que las esferas pueden estar totalmente contenidas en el dominio (esferas interiores) o bien, pueden intersectar con el contorno de éste (esferas de contorno). En la figura 2.1 (a) se muestra un recubrimiento en dos dimensiones de un cierto dominio.

Las funciones de interpolación se construyen con soporte compacto en estas esferas y se generan a raíz del paradigma de la Partición de la Unidad, apartado 2.8 anterior. El primer paso para desarrollar esta técnica es definir en cada nodo I de la nube dada, una función de base $\varphi_I^0(\mathbf{x})$ tal que

- $\sum_{I=1}^N \varphi_I^0(\mathbf{x}) = 1, \forall \mathbf{x} \in \Omega$.
- $\text{sop}(\varphi_I^0(\mathbf{x})) \subset \mathbf{B}(\mathbf{x}_I, r_I)$.
- $\varphi_I^0(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_0^s(\mathbb{R}^n), s \geq 0$.

Definición 2.11.1. El sistema de funciones formado por $\{\varphi_I^0(\mathbf{x})\}_{I=1}^N$ se dice que forma una partición de la unidad subordinado al recubrimiento abierto $\{\mathbf{B}(\mathbf{x}_I, r_I)\}_{I=1}^N$.

Proposición 2.11.1. *Estas funciones de aproximación así construidas, $\{\varphi_I^0(\mathbf{x})\}_{I=1}^N$, tienen consistencia de orden 0, es decir, son capaces de reproducir un movimiento como sólido rígido al reproducir exactamente funciones constantes.*

Demostración. Puede consultarse en DE Y BATHE [2001c]. □

Para lograr una consistencia de mayor orden, se define en cada nodo I un espacio de aproximación local $V_I^h = \text{span}\{p_m(\mathbf{x})\}_{m \in \mathcal{F}}$, donde $p_m(\mathbf{x})$ son polinomios u otras funciones y \mathcal{F} es un conjunto de índices. El superíndice h es una medida del tamaño de las esferas.

El espacio de aproximación global V_h se genera multiplicando la función de partición de la unidad en cada nodo I con las funciones de base local,

$$V_h = \sum_{I=1}^N \varphi_I^0 V_I^h$$

Por lo tanto,

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \sum_{m \in \mathcal{F}} h_{Im}(\mathbf{x}) \alpha_{Im}, \quad (2.11.1)$$

donde h_{Im} es

$$h_{Im} = \varphi_I^0(\mathbf{x}) p_m(\mathbf{x}) \quad (2.11.2)$$

función de forma asociada al m -ésimo grado de libertad α_{Im} del nodo I .

Nota 2.11.1. Obsérvese que si una función $p_m(\mathbf{x})$ está incluida en la base local de todos los nodos del dominio, entonces es posible reproducir $p_m(\mathbf{x})$ en todo el dominio. Esta propiedad se conoce como propiedad de reproducción de las funciones de forma.

En la elección de las funciones que forman una partición de la unidad, DE Y BATHE [2000] usualmente no utilizan funciones polinomiales, sino funciones de Shepard definidas por

$$\varphi_I^0(\mathbf{x}) = \frac{W_I(\mathbf{x})}{\sum_{J=1}^N W_J(\mathbf{x})},$$

donde $W_I(\mathbf{x})$ denota una función radial con soporte compacto sobre la esfera centrada en el nodo I , de tal forma que $\text{supp}(W_I) \subset \mathbf{B}(\mathbf{x}_I, r_I)$.

Estas funciones radiales son tales que $W_I(\mathbf{x}) = W(s_I)$, donde $s_I = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|_0}{r_I}$.

Proposición 2.11.2. *Como propiedades de la elección de las funciones W_I anteriores que forman una partición de la unidad para la aproximación del método, se tiene que:*

- (a) *Dados $W_I \in \mathcal{C}_0^s(\mathbf{B}(\mathbf{x}_I, r_I))$, $I = 1, 2, \dots, N$. y $p_m(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^l(\Omega)$, para $s, l \geq 0$. Entonces, las funciones de forma $h_{Im}(\mathbf{x})$ satisfacen que*

$$h_{Im}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_0^{\min(s,l)}(\mathbf{B}(\mathbf{x}_I, r_I) \cap \Omega).$$

- (b) *Si las funciones $W_I(\mathbf{x})$ y $p_m(\mathbf{x})$ son continuas, el campo de desplazamientos es continuo.*
- (c) *Los campos de tensiones obtenidos a partir de la derivada del campo de desplazamientos (2.11.1), son continuos en Ω si cada una de las funciones $W_I(\mathbf{x})$*

tienen pendiente nula en el centro, \mathbf{x} , y sobre la superficie, $\mathcal{S}(\mathbf{x}_I, r_I)$ de la esfera sobre la cual está definida, siempre y cuando las funciones $p_m(\mathbf{x})$ y sus derivadas sean lo suficientemente suaves.

Demostración. La demostración de 2.11.2(a) es inmediata, a partir de la definición de h_{Im} en la ecuación (2.11.2). Lo demás es consecuencia directa de ello. \square

Nota 2.11.2. El último apartado anterior se entiende mejor si se reconoce que, para funciones $p_m(\mathbf{x})$ lo suficientemente suaves, los campos de tensiones son continuos siempre y cuando las derivadas de W_I con respecto a las coordenadas espaciales x_i ($i \in 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial W(s_I)}{\partial x_i} = \frac{x_i - x_{Ii}}{r_i^2} \left[\frac{1}{s_I} \frac{dW(s_I)}{ds_I} \right] \quad (2.11.3)$$

son continuas en $\mathcal{B}(\mathbf{x}_I, r_I)$ y sobre $\mathcal{S}(\mathbf{x}_I, r_I)$.

Esta derivada existe cuando $S_I \rightarrow 0$ si W_I tiene pendiente nula en el centro de la esfera. Más aún, la derivada de la ecuación (2.11.3) anterior, es continua sobre $\mathcal{S}(\mathbf{x}_I, r_I)$, es decir, cuando $S_I \rightarrow 1$ si W_I tiene pendiente nula sobre la superficie $\mathcal{S}(\mathbf{x}_I, r_I)$.

Nota 2.11.3. Para obtener un campo de tensiones constante, la ecuación (2.11.3) anterior, introduce dos condiciones a la primera derivada de la función W_I . Si a la función W_I se le exige que se anule sobre la superficie $\mathcal{S}(\mathbf{x}_I, r_I)$, es decir, $W(s_I = 1) = 0$, surge entonces una tercera condición. Para satisfacer esas tres ecuaciones, la función W_I necesariamente debe ser al menos cúbica en s_I . De y Bathe escogen funciones de peso splines cúbicos de la siguiente forma

$$W(s_I) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s_I^2 + 4s_I^3, & 0 \leq s_I < \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s_I + 4s_I^2 - \frac{4}{3}s_I^3, & \frac{1}{2} < s_I \leq 1 \\ 0, & s_I > 1 \end{cases}$$

Problemática del método

El principal problema que presenta este método es que los dominios de integración de la formulación débil son, por lo general, intersecciones de esferas, los cuales no son dominios triviales, así que es necesario el empleo de una técnica especial de integración. Estas técnicas, además de un coste computacional muy alto, no proporcionan un nivel adecuado de exactitud, como se analizará más adelante.

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS NATURALES

En este capítulo se analiza uno de los métodos más recientes de la familia de los métodos sin malla: los métodos de Galerkin de vecindad natural (también conocidos globalmente como método de los Elementos Naturales). El planteamiento es similar a los anteriores, es decir, se parte de una técnica de interpolación de datos irregularmente espaciados. En este caso, la técnica de interpolación se conoce como *interpolación por vecinos naturales* (SIBSON [1980], WATSON [1981], WATSON [1994]). Ésta es usada para la construcción, mediante el método de Galerkin, de una base de un subespacio finito del espacio total de búsqueda —de dimensión infinita— al que se considera que pertenece la solución al problema planteado.

El método fue planteado por primera vez por TRAVERSONI [1994], que lo denominó método de Elementos Finitos de Vecindad Natural (*Natural Neighbor Finite Elements*). BRAUN Y SAMBRIDGE [1995] y BRAUN ET AL. [1995] lo aplicaron a diversos problemas dentro de la geofísica, campo dentro del cual la interpolación por vecinos naturales es especialmente útil, así como a la simulación de la interacción fluido-estructura. A estos autores se debe el nombre de *Método de los Elementos Naturales* (MEN). El análisis más profundo de su aplicación en la elastostática y en la elastodinámica lineales fue realizado por SUKUMAR ET AL. [1998], SUKUMAR [1998], SUKUMAR Y MORAN [1999], BUECHE ET AL. [2000] y CUETO ET AL. [2003b].

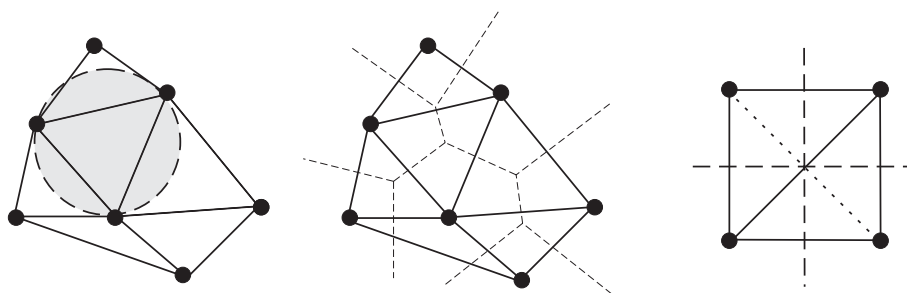


Figura 3.1: Triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos.

En esta sección se hará un repaso en profundidad de las características de este método en su aplicación a la resolución aproximada de ecuaciones en derivadas parciales (EDP).

3.1 Interpolación por Vecinos Naturales

Las coordenadas de vecino natural y la interpolación por vecinos naturales fueron desarrolladas por SIBSON [1980], SIBSON [1981]. Dado un conjunto de puntos $\mathcal{A} = \{n_1, \dots, n_n\}$, el sistema asociado de coordenadas de vecinos naturales es un conjunto de funciones continuas $\phi_I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $I = 1, \dots, n$, definido a partir del diagrama de Voronoi de \mathcal{A} .

Definición 3.1.1 (Criterio del circuncírculo vacío). Sea $\mathcal{A} = \{n_1, \dots, n_n\}$ un conjunto de puntos. Dada una triangulación de dicho conjunto, se dice que cumplen el Criterio del Circuncírculo Vacío si dentro de cada círculo que pasa por los tres puntos que forman cada triángulo, no existe ningún otro punto del conjunto \mathcal{A} .

Nota 3.1.1. Existe la excepción del caso “degenerado” en el que un número $n \geq d+2$ de puntos estén situados en la misma esfera, siendo d la dimensión del problema. Este es el caso de 4 puntos en una circunferencia o de 5 puntos en una esfera.

Definición 3.1.2. Dado un conjunto de puntos $\mathcal{A} = \{n_1, \dots, n_n\}$, se denomina triangulación de Delaunay, $Del(\mathcal{A})$, a la única triangulación de dichos puntos, que cumple el criterio del circuncírculo vacío.

En la figura 3.1 se puede observar la triangulación de Delaunay de un pequeño conjunto de puntos y su estructura dual, la teselación de Dirichlet o Diagrama de Voronoi.

Nota 3.1.2. Por simplicidad, el desarrollo que se presenta a continuación está basado en el espacio euclídeo en \mathbb{R}^2 . La mayoría de los conceptos son extensibles a \mathbb{R}^3 o incluso a un espacio genérico \mathbb{R}^n , aunque no todas las propiedades que se presentan se cumplen para $n > 2$. En esos casos, se hará referencia explícita a esas particularidades.

Definición 3.1.3. Dado un conjunto de puntos $\mathcal{A} = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ en \mathbb{R}^2 , se define la teselación de Dirichlet (o diagrama de Voronoi o de Thiessen, pues de las tres formas se le conoce) de primer orden, $Vor(\mathcal{A})$, a la subdivisión del plano en regiones tales que todos los puntos de esa región están más cerca del punto al que ésta está asociada que de ningún otro. Formalmente (GREEN Y SIBSON [1978])

$$T_I = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / d(\mathbf{x}, n_I) < d(\mathbf{x}, n_J) \quad \forall J \neq I\} \quad (3.1.1)$$

donde T_I representa la celda de Voronoi asociada al punto n_I . $d(\cdot, \cdot)$ representa la distancia euclídea entre dos puntos.

Si definimos el *bisector* de dos puntos n_I, n_J como el hiperplano perpendicular a la línea $\overline{n_I n_J}$, éste divide al plano en dos semiplanos. Siendo $h(n_I, n_J)$ el semiplano que contiene a n_I y $h(n_J, n_I)$ el que contiene a n_J , se tiene una definición equivalente de la celda de Voronoi en la forma

$$T_I = \bigcap_{1 \leq J \leq n, J \neq I} h(n_I, n_J) \quad (3.1.2)$$

Queda claro a partir de esta definición que la triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos se construye sobre la *envoltura convexa* del conjunto \mathcal{A} . Por envoltura convexa (*convex hull* en terminología inglesa, $CH(\mathcal{A})$ o $conv(\mathcal{A})$), se entiende el más pequeño de los conjuntos convexos que contienen a \mathcal{A} .

Definición 3.1.4. Se denota T_{IJ} a la celda de Voronoi de segundo orden y se define como el lugar geométrico de los puntos que tienen al punto n_I como el más cercano y al n_J como el segundo en cercanía. Formalmente

$$T_{IJ} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / d(\mathbf{x}, n_I) < d(\mathbf{x}, n_J) < d(\mathbf{x}, n_K) \quad \forall J \neq I \neq K\} \quad (3.1.3)$$

3.1.1. Coordenadas de vecino natural

Definición 3.1.5. Dado un punto \mathbf{x} , se define $Vor^+ = Vor(\mathcal{A} \cup \{\mathbf{x}\})$ y $Del^+ = Del(\mathcal{A} \cup \{\mathbf{x}\})$. A su vez, podemos denotar a $V^+(\mathbf{x})$ a la celda de Voronoi de \mathbf{x} en Vor^+ .

Definición 3.1.6. Los vecinos naturales de un punto \mathbf{x} con respecto a \mathcal{A} son los vértices distintos de \mathbf{x} que forman triángulos de Del^+ a los que también pertenece \mathbf{x} .

La definición de las coordenadas de vecino natural de un punto \mathbf{x} se obtiene a partir del diagrama de Voronoi de primer orden. Si sobre éste, ya construido, se introduce \mathbf{x} , las áreas de las celdas sufrirán una modificación por la presencia del nuevo punto. Las coordenadas de vecino natural proporcionan una cuantificación de esta variación y, por tanto, una medida de la proximidad relativa entre los nodos.

Definición 3.1.7. Sea entonces $\kappa(\mathbf{x})$ una medida de Lebesgue (longitud, área o volumen si tratamos con \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , respectivamente) de la celda $T_{\mathbf{x}}$. Sea asimismo $\kappa_I(\mathbf{x})$ una medida equivalentemente definida para la celda de segundo orden $T_{\mathbf{x}I}$. Entonces las coordenadas de vecino natural de \mathbf{x} respecto al nodo I se definen como la relación entre el área de T_I que ha sido transferida a $T_{\mathbf{x}}$, respecto al área total de $T_{\mathbf{x}}$. Esta definición se representa esquemáticamente en la figura 3.2 y se expresaría matemáticamente como:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{\kappa_I(\mathbf{x})}{\kappa(\mathbf{x})} \quad (3.1.4)$$

Respecto a la figura 3.2, se tendría que:

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{A_{abfe}}{A_{abcd}} \quad (3.1.5)$$

Proposición 3.1.1. *Las coordenadas de vecino natural tienen interesantes propiedades:*

(1) Para cualquier $I \leq n$, $\phi_I(\mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}$, donde δ_{IJ} es el una Delta de Kronecker.

(2) Para $I = 1, \dots, n$, $\phi_I(\mathbf{x}) \geq 0$ y $\sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) = 1$.

(3) $\mathbf{x} = \sum_I \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{x}_I$. La demostración puede encontrarse en SIBSON [1981].

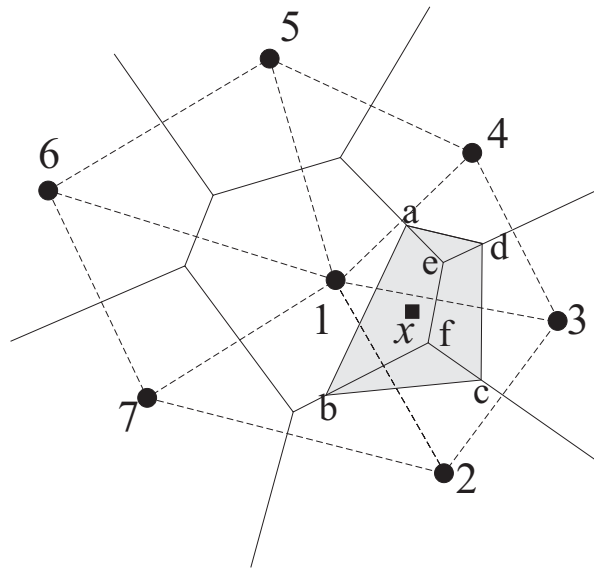


Figura 3.2: Definición de las coordenadas de vecino natural.

Proposición 3.1.2. Denotemos por Λ_I el soporte de ϕ_I , es decir, el subconjunto de \mathbf{x} tales que $\phi_I(\mathbf{x}) \neq 0$. Entonces se tiene que Λ_I está incluido en la unión de las bolas que circunscriben los d -símplex¹ de $\text{Del}(\mathcal{A})$ que son incidentes en el punto n_I .

Aunque más adelante, en la sección 3.4, se comenta el cálculo de las funciones de forma, a continuación se muestra gráficamente el aspecto de una función de forma calculada mediante la técnica de vecinos naturales. Véase la figura (3.3).

Proposición 3.1.3. La interpolación de la variable esencial del problema (en general, el desplazamiento) se realizaría entonces

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \tag{3.1.6}$$

\mathbf{u}_I representa el desplazamiento del nodo I y $\phi_I(\mathbf{x})$ serían las funciones de forma asociadas a cada nodo evaluadas en el punto \mathbf{x} .

Actualmente ha aparecido en la literatura un nuevo interpolante, debido a BELIKOV ET AL. [1997] y también a HIYOSHI Y SIGIHARA [1999], a menudo referenciado como interpolante por vecinos naturales *no-Sibsonianos* o de Laplace.

¹Es la menor de las envolturas convexas que contienen a $d+1$ puntos. Por ejemplo, un 2-símplex es un triángulo. Más adelante se define con mayor precisión este concepto (3.5.1).

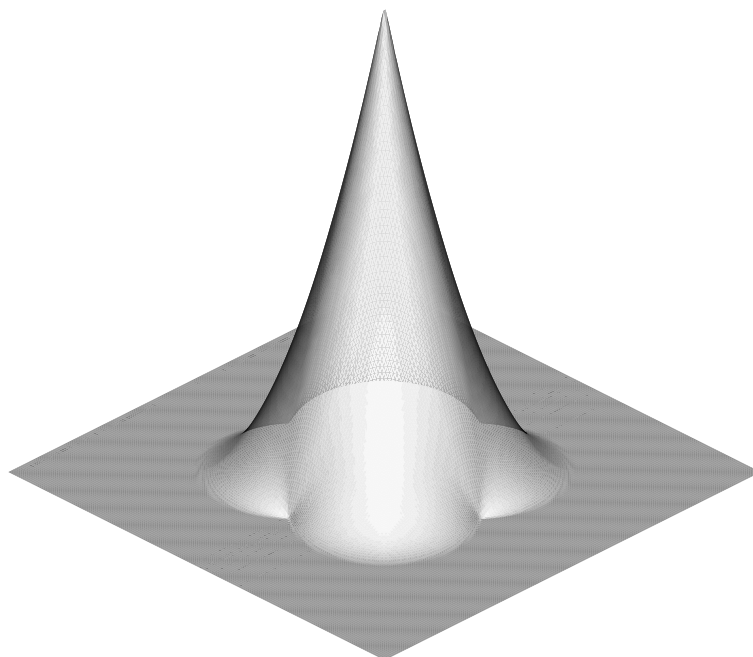


Figura 3.3: Función de forma centrada en un nodo que se encuentra rodeado de otros cuatro nodos (tomado de SUKUMAR [1998]).

Definición 3.1.8. Si se define la celda de intersección $t_{IJ} = \{\mathbf{x} \in T_I \cap T_J, J \neq I\}$ (nótese que t_{IJ} puede ser un conjunto vacío) se puede definir el valor

$$\alpha_J(\mathbf{x}) = \frac{|t_{IJ}|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J)} \quad (3.1.7)$$

donde $|\cdot|$ representa la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^{d-1} , siendo d la dimensión del espacio en estudio.

Así, el valor de la función de forma del punto \mathbf{x} con respecto al nodo 4 en la figura 3.4 se define como

$$\phi_4^{ns}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_4(\mathbf{x})}{\sum_{J=1}^n \alpha_J(\mathbf{x})} = \frac{s_4(\mathbf{x})/h_4(\mathbf{x})}{\sum_{J=1}^n [s_J(\mathbf{x})/h_J(\mathbf{x})]} \quad (3.1.8)$$

El aspecto de esta función de forma así definida, véase la figura 3.5, es muy similar al de la función de forma Sibsoniana vista anteriormente, mostrada en la figura 3.3.

En el apartado dedicado a las propiedades del método 3.3, se comentan también

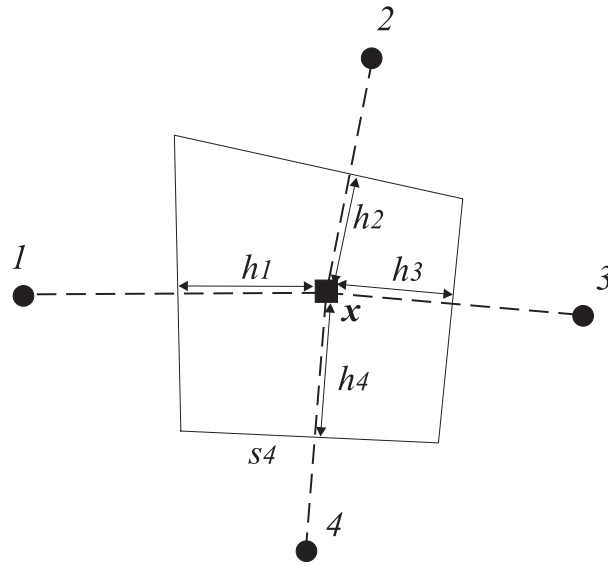


Figura 3.4: Definición de coordenadas no-Sibsonianas.

las propiedades de la interpolación no-Sibsoniana.

Nota 3.1.3. El interpolante no-Sibsoniano se define usando entidades geométricas de una dimensión menos que el espacio original en consideración. Esto hace que, en general, el coste computacional sea ligeramente menor.

3.2 Formulación débil del problema

A continuación se presenta un estudio de las ecuaciones de gobierno y de la forma débil del problema de la elastostática lineal. Sin embargo, en el desarrollo de esta tesis, se puede encontrar otro tipo de ecuaciones de gobierno, como en el capítulo dedicado a la formulación mixta (Capítulo 5), así como el capítulo dedicado a la dinámica de fluidos (Capítulo 6). A ellas se hará referencia más adelante.

Ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones que gobiernan el problema de la elastostática lineal se pueden formular como sigue:

Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n = 1, 2, 3$, y dado Γ su contorno, la ecuación de equilibrio en elastostática lineal puede escribirse como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \text{en } \Omega, \quad (3.2.1)$$

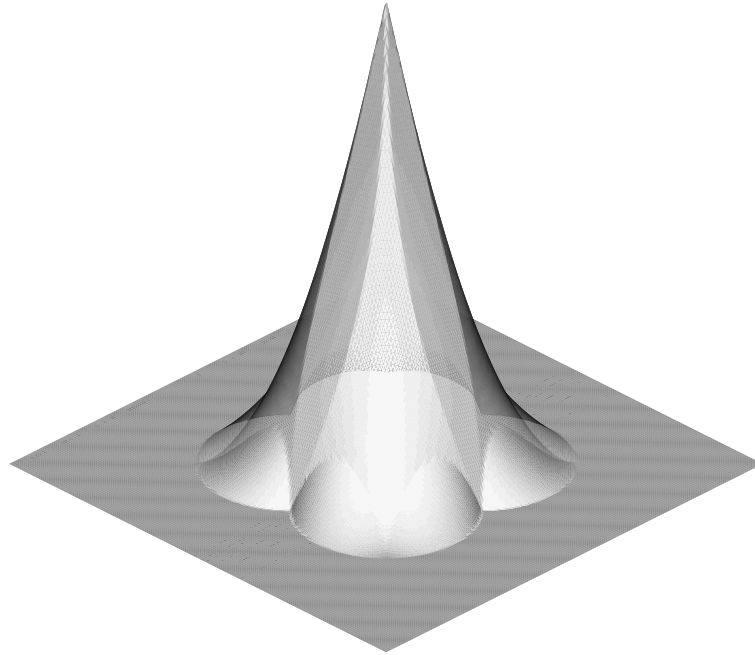


Figura 3.5: Función de forma no-Sibsoniana (SUKUMAR ET AL. [1998])

donde ∇ es el operador divergencia, $\boldsymbol{\sigma}$ representa el tensor de tensiones de Cauchy para un campo de desplazamientos cinemáticamente admisibles \boldsymbol{u} y \boldsymbol{b} es el vector de fuerzas por unidad de volumen.

La relación de comportamiento para un material elástico lineal en proceso isoterma y con tensiones y deformaciones iniciales nulas, viene dada por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.2.2)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de pequeñas deformaciones de Cauchy, y \mathbf{C} el tensor de comportamiento del material. La relación cinemática entre el tensor de pequeñas deformaciones y el vector de desplazamientos \boldsymbol{u} es

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u},$$

donde ∇^s es la parte simétrica del operador gradiente.

Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno naturales y esenciales son, respectivamente:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ en } \Gamma_t \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_u \quad (3.2.4)$$

Debe cumplirse que $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$ y que $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$. Donde Γ es el contorno de Ω , \mathbf{n} representa el vector normal al contorno y $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{t}}$ son los desplazamientos y tensiones en el contorno prescritos, respectivamente.

Formulación débil del problema

La forma débil o forma variacional (principio de los trabajos virtuales) asociada a la ecuación (3.2.1) sería: *Encontrar $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \quad (3.2.5)$$

donde $H^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev de funciones con la primera derivada de cuadrado integrable sobre Ω , y $H_0^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev de funciones con el cuadrado de la primera derivada integrable sobre en Ω y que se anulan sobre la frontera esencial Γ_u .

La forma discreta del problema (método de Petrov-Galerkin) se tendría al escoger unas aproximaciones a \mathbf{u} y $\delta \mathbf{v}$ de la forma:

$$\delta v_i^h = \sum_I \Psi_I(x) \delta v_{Ii} \quad (3.2.6)$$

$$u_i^h = \sum_I \Phi_I(x) u_{Ii} \quad (3.2.7)$$

donde δv_{Ii} son coeficientes arbitrarios, con tal de que δv_i^h se anule en Γ_u . Normalmente, en el ámbito del método de los elementos naturales, las funciones $\Psi_I(x)$ y $\Phi_I(x)$ se toman idénticas a las dadas en la ecuación (3.1.4), dando lugar a un método de Bubnov-Galerkin. Se obtiene así un sistema discreto de ecuaciones

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext}, \quad (3.2.8)$$

donde

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \mathbf{B}_J d\Omega, \quad (3.2.9)$$

$$\mathbf{f}_I^{ext} = \int_{\Gamma_t} \phi_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_I \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega. \quad (3.2.10)$$

donde \mathbf{C} representa la forma matricial del tensor de comportamiento de cuarto orden, \mathbf{C} .

En las anteriores ecuaciones, \mathbf{B}_I es la matriz de derivadas de las funciones de aproximación, la cual viene definida como sigue para el caso de un problema tridimensional (por ejemplo),

$$\mathbf{B}_I = \begin{pmatrix} \phi_{I,x} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{I,z} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} & 0 \\ \phi_{I,z} & 0 & \phi_{I,x} \\ 0 & \phi_{I,z} & \phi_{I,y} \end{pmatrix} \quad (3.2.11)$$

La matriz de comportamiento \mathbf{C} para un material isótropo elástico lineal es:

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \quad (3.2.12)$$

3.3 Propiedades del Método de Elementos Naturales

A continuación se describen algunas de las propiedades más importantes que presenta este método. Estas propiedades son consecuencia directa de la interpolación por vecinos naturales descrita anteriormente, así como propiedades que también ofrece el interpolante no-Sibsoniano aplicado al método de los elementos naturales.

Proposición 3.3.1 (Funciones estrictamente interpolantes). *A diferencia de la mayoría de los métodos sin malla, las funciones de forma del método de los elementos naturales son funciones estrictamente interpolantes, es decir, la superficie interpolada contiene los valores nodales:*

$$\phi_I(\mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}, \quad (3.3.1)$$

de forma que los parámetros nodales \mathbf{u} , son los desplazamientos nodales.

Demostración. Inmediata, al hacer $\mathbf{x} \rightarrow J$ en (3.1.4). \square

Obtenemos así una primera ventaja de este método frente a otros métodos sin malla, ya que no hace uso de técnicas de interpolación para la prescripción de desplazamientos nodales, bastaría con realizar una sustitución directa. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que esta propiedad no es suficiente para una correcta imposición de condiciones de contorno esenciales, por que el cumplimiento de éstas en los nodos del contorno no asegura su cumplimiento en todo él.

Nota 3.3.1. Otras funciones como las del *MMCM*, tienen un carácter aproximante, no cumplen la condición anterior (3.3.1).

Nota 3.3.2 (Independencia de la distribución). Es conocida la dependencia de los métodos de aproximación a la distribución de los puntos que forman el mallado del dominio (MEF) (véase BABUŠKA Y AZIZ [1976]), donde existe un límite en el ángulo mínimo de la triangulación para asegurar la convergencia de los resultados. Sin embargo, la interpolación por vecinos naturales, y por extensión el *MEN*, no muestran un comportamiento tan sensible a dicha distribución de los puntos. De hecho, no existe ningún requerimiento sobre el ángulo mínimo que deben tener los triángulos que forman la triangulación de Delaunay del dominio del problema, ni tampoco se han mostrado dependencia directa de los resultados que presenta el *MEN* respecto a dicha triangulación, ni en dos dimensiones (SUKUMAR ET AL. [1998]), ni en tres (CUETO ET AL. [2002]).

Nota 3.3.3 (Partición de la unidad). Por construcción, (ecuación 3.1.4), las funciones de forma del *MEN* constituyen una partición de la unidad, es decir,

$$\sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.3.2)$$

Esto puede ser aprovechado para enriquecer el interpolante, tal y como propusieron BABUŠKA Y MELENK [1996].

Por otro lado, es bien conocido que para asegurar la convergencia de un método, es necesario que éste sea consistente y estable (BELYTSCHKO ET AL. [1998a]).

La consistencia del método está relacionada con el grado del polinomio que es capaz de reproducir. Si la ecuación diferencial que rige el problema es de orden $2k$, entonces al método se le exige consistencia de orden k , es decir, que sea capaz de reproducir un campo constante en la derivada de orden k de la variable esencial.

Particularmente en el caso de la elastostática, cuya ecuación diferencial es de grado 2, se debe poder reproducir un campo de desplazamientos lineal.

Proposición 3.3.2 (Consistencia y estabilidad). *El método de los elementos naturales formulado anteriormente es consistente y estable.*

Demostración. SIBSON [1980] ha demostrado que las coordenadas de vecino natural cumplen

$$\mathbf{x} = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{x}_I \quad (3.3.3)$$

Esta propiedad, junto con la propiedad de partición de la unidad (3.3.2), proporcionan la demostración de la consistencia lineal. \square

Proposición 3.3.3 (Continuidad y derivabilidad). *Referente a las condiciones de continuidad y de derivabilidad, la función de forma del MEN es derivable, de clase C^∞ , en todos los puntos del dominio, excepto en los nodos, donde es C^0 (SIBSON [1980]).*

Demostración. (HIYOSHI [2000]) Para demostrar la continuidad del interpolante Sibsonianiano es suficiente demostrar que $\phi_I(\mathbf{x}_J) \rightarrow \delta_{IJ}$ cuando \mathbf{x} se aproxima a \mathbf{x}_J . Nótese que $\phi_J(\mathbf{x})$ es finito mientras $\phi_I(\mathbf{x})$ para $I \neq J$ tiende a 0 cuando \mathbf{x} se aproxima a \mathbf{x}_J .

Para cualquier $I = 1, \dots, n$, se obtiene que

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{\phi_I(\mathbf{x})}{\phi_1(\mathbf{x}) + \dots + \phi_J(\mathbf{x}) + \dots + \phi_n(\mathbf{x})} \rightarrow \delta_{IJ}.$$

\square

Nota 3.3.4. Es posible construir funciones de forma de continuidad C^1 basadas en la interpolación por vecinos naturales. Varios tipos de estas interpolaciones han sido propuestas en la literatura. Por ejemplo, SIBSON [1981] propone utilizar mínimos cuadrados ponderados para modificar su esquema de interpolación original. Por otro lado, BELIKOV Y SEMENOV [1998] proponen un procedimiento para la generación de una interpolación de alto orden usando interpolantes no-Sibsonianos.

Propiedades de la interpolación no-Sibsoniana

El interpolante no-Sibsoniano presenta las mismas propiedades que el interpolante Sibsoniano, tales como partición de la unidad, interpolación, soporte y regularidad de las funciones de forma, propiedades que se comentan más adelante en el apartado dedicado a las propiedades del método, 3.3. Además, debido a las propiedades anteriores, ambos interpolantes aseguran que la norma de la interpolación está acotada: $\|\mathbf{u}\| \leq \max_I \mathbf{u}_I$. Los interpolantes resultantes de combinaciones lineales de interpolantes Sibsonianos y no-Sibsonianos son también interpolantes basados en vecinos naturales válidos para la solución de ecuaciones en derivadas parciales (SUKUMAR ET AL. [2001]).

Proposición 3.3.4 (Consistencia lineal). *El interpolante no-Sibsoniano tiene precisión lineal, es decir, reproduce el espacio de polinomios lineales en \mathbb{R}^d (BELIKOV ET AL. [1997]).*

Demostración. SUKUMAR ET AL. [2001] Considérese un campo de desplazamientos lineal de la forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}, \quad (3.3.4)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son vectores constantes. Los desplazamientos nodales exactos están dados por

$$\mathbf{u}_I = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_I, \quad (3.3.5)$$

donde I es el índice de cada nodo. Considérese la función de aproximación del MEN,

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I, \quad (3.3.6)$$

donde \mathbf{u}_I es el vector de desplazamientos nodales del nodo I . Teniendo en cuenta (3.3.5) en la ecuación anterior, se obtiene

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}^T \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{x}_I. \quad (3.3.7)$$

Sumando y restando a esta ecuación $\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}$ y teniendo en cuenta que

$$\sum_I \phi_I(\mathbf{x}) = 1,$$

se tiene que

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}^T \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x})(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}). \quad (3.3.8)$$

Para completar la demostración es suficiente mostrar que se mantiene la siguiente igualdad:

$$\sum_I \phi_I(\mathbf{x})(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = 0. \quad (3.3.9)$$

En primer lugar se demuestra que la igualdad anterior se satisface en el caso bidimensional. Teniendo en cuenta una transformación del espacio \mathbb{R}^2 en el espacio \mathbb{C} , tal que

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

se puede reescribir el criterio anterior como

$$\sum_I \phi_I(z)(z_I - z) = 0. \quad (3.3.10)$$

Sustituyendo la forma explícita de la función de forma no-Sibsoniana de la ecuación (3.1.8) se obtiene

$$\frac{\sum_{I=1}^n (z_I - z) \frac{s_I(z)}{h_I(z)}}{\sum_{J=1}^n \frac{s_J(z)}{h_J(z)}} = 0. \quad (3.3.11)$$

Para demostrar lo anterior, nótese que los lados de la celda de Voronoi que contiene a (x, y) son los números complejos \tilde{z}_I . Si el polígono tiene el contorno cerrado, se satisface

$$\sum_{I=1}^n \tilde{z}_I = 0.$$

Introduciendo la forma trigonométrica de los números complejos,

$$\tilde{z}_I = s_I(z) \exp(i\varphi_I(z)),$$

$$\sum_{I=1}^n \tilde{z}_I = \sum_{I=1}^n s_I(z) \exp(i\varphi_I(z)) = i \sum_{I=1}^n s_I(z) \exp(i\varphi_I(z) - i\frac{\pi}{2}) = 0, \quad (3.3.12)$$

y como $|z_I - z| = 2h_I(z)$, se puede escribir que

$$i \sum_{I=1}^n \left[h_I(z) \exp(i\varphi_I(z) - i\frac{\pi}{2}) \right] \frac{s_I(z)}{h_I(z)} = \frac{i}{2} \sum_{I=1}^n (z_I - z) \frac{s_I(z)}{h_I(z)} = 0, \quad (3.3.13)$$

lo cual prueba la ecuación (3.3.11) y así

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

quedando completa la demostración para el caso plano.

Para un caso arbitrario \mathbb{R}^d considérese análogamente un campo de desplazamientos lineal $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d$, el cual satisface la ecuación (3.3.9) anterior. Siguiendo la demostración para el caso plano, se tiene que demostrar el siguiente criterio para el caso de d dimensiones.

$$\frac{\sum_{I=1}^n (\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \frac{s_I(\mathbf{x})}{h_I(\mathbf{x})}}{\sum_{J=1}^n \frac{s_J(\mathbf{x})}{h_J(\mathbf{x})}} = 0. \quad (3.3.14)$$

Para probar esto, considérese una superficie cerrada S de la celda de Voronoi que contiene a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ y su volumen V . Considérese también el vector identidad. Por el Teorema de Green

$$\int_V \nabla f dV = \oint_S f dS. \quad (3.3.15)$$

Sustituyendo $f = 1$ en la ecuación anterior, se obtiene

$$\int_V \nabla f dV = 0 = \oint_S dS = \sum_{I=1}^n \frac{(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) s_I(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}|}, \quad (3.3.16)$$

y como $|z_I - z| = 2h_I(z)$, se puede escribir que

$$\sum_{I=1}^n \frac{(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) s_I(\mathbf{x})}{2h_I(\mathbf{x})} = 0, \quad (3.3.17)$$

lo cual prueba la ecuación (3.3.14) y así

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

quedando completa la demostración para el caso general. \square

3.3.1. Aproximación en el *MEN*

La aproximación que estas funciones de forma proporcionan en un determinado punto depende directamente del número de vecinos naturales que tiene ese punto. A continuación se presentan algunos teoremas que muestran el comportamiento de la aproximación por vecinos naturales.

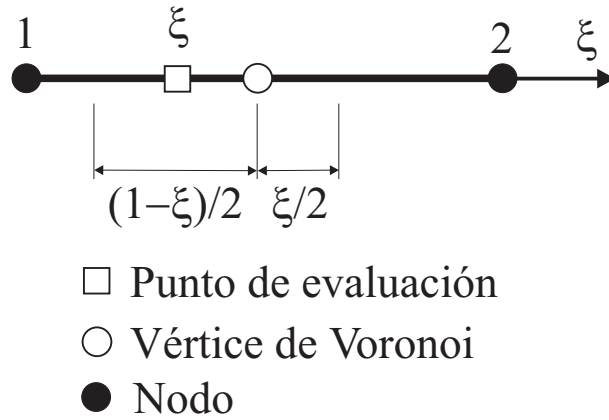


Figura 3.6: Aproximación en el elemento de referencia unidimensional.

Proposición 3.3.5. *En dominios de una sola dimensión, la función de forma del MEN equivale a la del método de los Elementos Finitos lineales.*

Demostración. SUKUMAR ET AL. [1998] Considérese un segmento de longitud L discretizado por medio de N nodos no necesariamente regularmente espaciados. Los vértices del diagrama de Voronoi en una dimensión se localizan, por definición, en el punto medio entre los nodos. Como consecuencia, cada punto del segmento $[0, L]$ tiene siempre dos vecinos naturales —el nodo más cercano y el segundo nodo en cercanía—.

Considérese el espacio entre dos nodos n_I y n_{I+1} , numerados en el sistema de referencia como 1 y 2 (véase la figura 3.6), Ω_I . Si establecemos un sistema de coordenadas

$$\varepsilon = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)}{(\mathbf{x}_{I+1} - \mathbf{x}_I)},$$

de forma que $\varepsilon \in [0, 1]$, las funciones de forma se pueden escribir como

$$\phi_I(\varepsilon) = \frac{L_{\varepsilon I}}{L_{\varepsilon 1} + L_{\varepsilon 2}} \quad (3.3.18)$$

siendo

$$L_{\varepsilon 1} = \frac{(1 - \varepsilon)}{2} \quad \text{y} \quad L_{\varepsilon 2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí se deduce que $\phi_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon$ y que $\phi_2(\varepsilon) = \varepsilon$ \square

En dos dimensiones la situación cambia radicalmente y el tipo de aproximación conseguida dependerá del número de vecinos naturales del punto bajo consideración.

Teorema 3.3.6. *Si un punto tiene tres vecinos naturales, las funciones de forma del MEN equivalen a las coordenadas baricéntricas del triángulo, es decir, a las funciones de forma del elemento finito triangular lineal (constant strain triangle, CST).*

Demostración. Denominando 1, 2 y 3 a los nodos vecinos del punto $\mathbf{x} = (x, y)$ en cuestión, de coordenadas (x_I, y_I) y acudiendo a la consistencia lineal del método (3.3.3) se deberá cumplir que

$$\sum_{I=1}^3 \phi_I(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.3.19)$$

$$\sum_{I=1}^3 \phi_I(\mathbf{x})x_I = x \quad (3.3.20)$$

$$\sum_{I=1}^3 \phi_I(\mathbf{x})y_I = y \quad (3.3.21)$$

En forma matricial, se tendría:

$$D(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.3.22)$$

La solución del sistema de ecuaciones anterior vendrá dada por

$$\phi_1(x) = \frac{D_1(x)}{D(x)} \quad (3.3.23)$$

$$\phi_2(x) = \frac{D_2(x)}{D(x)} \quad (3.3.24)$$

$$\phi_3(x) = \frac{D_3(x)}{D(x)} \quad (3.3.25)$$

siendo

$$D(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 2A_{123} \quad (3.3.26)$$

y siendo $D_1(\mathbf{x}) = 2A_1(\mathbf{x})$, $D_2(\mathbf{x}) = 2A_2(\mathbf{x})$ y $D_3(\mathbf{x}) = 2A_3(\mathbf{x})$, lo cual constituye precisamente la definición de las coordenadas baricéntricas o, lo que es lo mismo, las funciones de forma de los Elementos Finitos triangulares lineales, tal y como se

quería demostrar. \square

Teorema 3.3.7. *Si el punto tiene 4 vecinos naturales situados en una retícula regular, la aproximación obtenida es una interpolación bilineal entre esos nodos.*

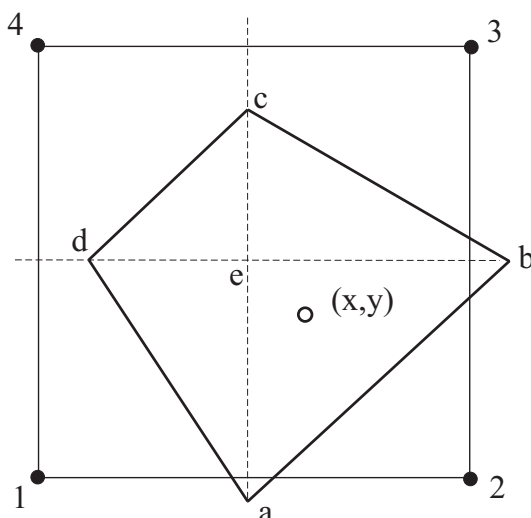


Figura 3.7: Aproximación en el caso de que un punto tenga cuatro vecinos naturales dispuestos en una red regular (SUKUMAR ET AL. [1998]).

Demostración. Considérese ahora un punto \mathbf{x} con cuatro vecinos situados en los vértices de un cuadrado (figura 3.7). Por definición, las coordenadas de vecino natural de \mathbf{x} serán:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \frac{A_I(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})}; \quad I = 1, \dots, 4. \quad (3.3.27)$$

siendo $A_1(\mathbf{x})$, $A_2(\mathbf{x})$, $A_3(\mathbf{x})$ y $A_4(\mathbf{x})$, respectivamente, las áreas de los triángulos eda , eab , ebc y ecd . $A(\mathbf{x})$ representa al área de la celda de Voronoi de primer orden, cuyo centro es el punto e .

Para calcular las áreas de las celdas de Voronoi de segundo orden supongamos que el cuadrado en cuestión tiene tamaño unitario, es decir, que sus vértices están situados en los puntos $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 0)$, $(x_3, y_3) = (1, 1)$ y $(x_4, y_4) = (0, 1)$. Siendo así, se calcula rápidamente que las coordenadas de los vértices de las celdas de segundo orden —esto es, los centros de los circuncírculos— tienen por

coordenadas:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{-x + x^2 + y^2}{2y} \quad (3.3.28)$$

$$b_1 = \frac{1 + y - x^2 - y^2}{2(1 - x)}, \quad b_2 = \frac{1}{2} \quad (3.3.29)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1 + x - x^2 - y^2}{2(1 - y)} \quad (3.3.30)$$

$$d_1 = \frac{-y + x^2 + y^2}{2x}, \quad d_2 = \frac{1}{2} \quad (3.3.31)$$

Las áreas de los triángulos serán:

$$A_1(\mathbf{x}) = \frac{(x^2 + y^2 - x - y)^2}{8xy} \quad (3.3.32)$$

$$A_2(\mathbf{x}) = \frac{(x^2 + y^2 - x - y)^2}{8y(1 - x)} \quad (3.3.33)$$

$$A_3(\mathbf{x}) = \frac{(x^2 + y^2 - x - y)^2}{8(1 - x)(1 - y)} \quad (3.3.34)$$

$$A_4(\mathbf{x}) = \frac{(x^2 + y^2 - x - y)^2}{8x(1 - y)} \quad (3.3.35)$$

y el área total, dado que $A(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^4 A_I$, será:

$$A(\mathbf{x}) = \frac{(x^2 + y^2 - x - y)^2}{8xy(1 - x)(1 - y)} \quad (3.3.36)$$

obteniéndose finalmente que:

$$\phi_1(\mathbf{x}) = (1 - x)(1 - y) \quad (3.3.37)$$

$$\phi_2(\mathbf{x}) = x(1 - y) \quad (3.3.38)$$

$$\phi_3(\mathbf{x}) = xy \quad (3.3.39)$$

$$\phi_4(\mathbf{x}) = y(1 - x) \quad (3.3.40)$$

que son precisamente las ecuaciones de las funciones de forma del elemento finito bilineal cuadrilátero sobre las coordenadas de referencia. \square

Nota 3.3.5. Hay que recalcar que el teorema anterior es cierto solo para el caso de que el punto tenga cuatro vecinos naturales dispuestos en una red rectangular y no para

el caso general de que tenga cuatro vecinos dispuestos irregularmente. En el caso de que el punto tenga más de cuatro vecinos o incluso cuatro, pero irregularmente distribuidos, la aproximación resultante es de tipo racional.

3.4 Cálculo de las funciones de forma del *MEN*

Para problemas de dos dimensiones existen dos algoritmos muy extendidos a la hora de calcular las funciones de forma del método de los elementos naturales, a saber, el algoritmo de Watson (WATSON [1994]) y el algoritmo de LASSERRE [1983]. El primero se centra en el cálculo de las coordenadas de los vecinos naturales descomponiendo las celdas de Voronoi en triángulos, que son a su vez, sub-triángulos de la triangulación de Delaunay. Sin embargo, el algoritmo de Lasserre calcula dichas coordenadas mediante una relación de áreas.

El autor no conoce ninguna extensión del algoritmo de Watson a tres dimensiones, mientras que el Algoritmo de Lasserre sí ha sido extendido. Este es también más robusto, estando bien definido para cualquier punto del dominio. Por el contrario, el algoritmo de Watson falla en el cálculo de las funciones de forma en los puntos situados en los lados de los triángulos de la triangulación de Delaunay. En esta tesis, se ha utilizado el algoritmo de Lasserre para el cálculo de las funciones de forma en problemas tridimensionales (obvio, por lo comentado anteriormente). En problemas bidimensionales, por el contrario, las funciones de forma han sido calculadas tanto mediante el algoritmo de Watson como el algoritmo de Lasserre.

3.4.1. Algoritmo de Watson

Los detalles de este algoritmo pueden consultarse en WATSON [1994]. Para describir brevemente el mismo, y su implementación numérica, se refiere al lector a la figura 3.2, donde se describe gráficamente la construcción de las funciones de interpolación por vecinos naturales. En la figura 3.8 aparece el conjunto de nodos original. El diagrama de Voronoi se representa mediante líneas discontinuas y también se muestran los circuncírculos que forman cada triángulo de Delaunay.

La metodología de cálculo de la evaluación de las funciones de forma está basada en que la celda de Voronoi de segundo orden de \mathbf{x} (figura 3.2) puede ser calculada mediante la suma de distintas áreas de triángulos. Para determinar fácilmente si un nodo de la nube inicial es vecino natural de un punto \mathbf{x} se usa el criterio del circuncírculo vacío definido anteriormente en el apartado 3.1.1. Si el cuadrado de la distancia Euclídea desde \mathbf{x} al centro de un circuncírculo (asociado con los nodos

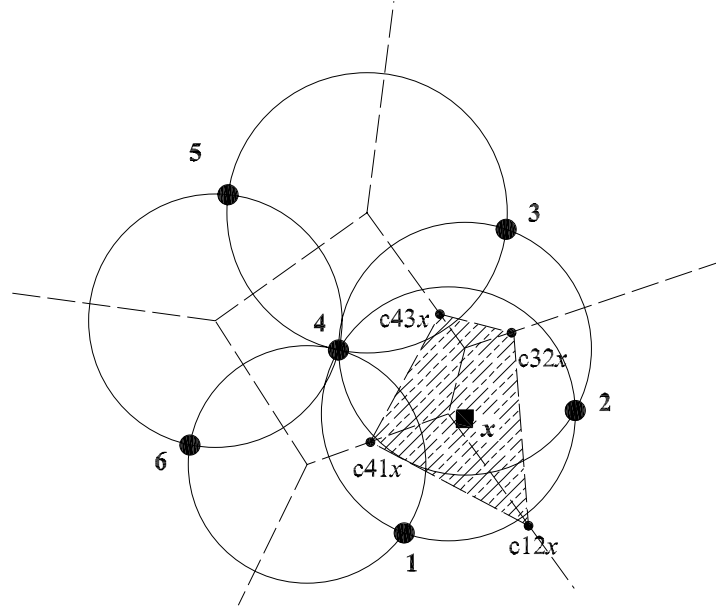


Figura 3.8: Cálculo de la función de forma mediante el algoritmo de Watson.

$n_I, n_J,$ y n_K) es menor que el cuadrado del radio del circuncírculo, los nodos $n_I, n_J,$ y n_K son vecinos naturales del punto \mathbf{x} :

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2 < R^2 \tag{3.4.1}$$

donde \mathbf{v} representa el centro del circuncírculo de un triángulo de Delaunay y R el radio del mismo. Si esta propiedad se cumple, los tres nodos del triángulo son vecinos naturales del punto \mathbf{x} .

Dada una terna (p, q, r) que representan los vértices de un triángulo, para cada triángulo de Delaunay t que cumpla la condición (3.4.1) anterior, se forma un nuevo grupo de triángulos $\{t_1, t_2, t_3\}$, definido cada uno por el punto \mathbf{x} y por dos de los vértices de t , véase figura 3.8. Si se considera un nuevo sistema de numeración a_i , ($i = 1, 2, 3$) para los vértices de esos tres nuevos triángulos t_i , se pueden calcular los nuevos circuncentros de estos nuevos triángulos y sus derivadas mediante la siguiente expresión

$$c_i(\mathbf{x}) = \Theta(a_j, a_k, \mathbf{x}) \tag{3.4.2}$$

$$c_{i,m}(\mathbf{x}) = \Theta_{,m}(a_j, a_k, \mathbf{x}) \tag{3.4.3}$$

donde $m = 1, 2$ e i, j, k son permutaciones cíclicas de $1, 2$ y 3 , y donde Θ y $\Theta_{,m}$ representan funcionales que proporcionan el circuncentro de un triángulo y de su derivada, respectivamente.

Estos centros definen a su vez otra serie de subtriángulos, formados por las permutaciones que pueden realizarse en el conjunto $\{c_1(x), c_2(x), c_3(x), \mathbf{v}\}$, de tal forma que \mathbf{v} aparezca en todos los triángulos. El área y las derivadas de estos triángulos se puede escribir en la forma

$$\alpha_{it}(\mathbf{x}) = \Psi(c_j(\mathbf{x}), c_k(\mathbf{x}), v) \quad (3.4.4)$$

$$\alpha_{it,m}(\mathbf{x}) = \Psi_{,m}(c_j(\mathbf{x}), c_k(\mathbf{x}), v) \quad (3.4.5)$$

donde $m = 1, 2$ y i, j, k toman valores $1, 2, 3$ permutados cíclicamente. Nótese que se deben almacenar los vértices de todos los triángulos en sentido antihorario, al igual que en el *MEF*, para lograr un correcto mantenimiento del signo en estas fórmulas.

Nota 3.4.1. A pesar de estar correctamente definido desde el punto de vista geométrico, el algoritmo anterior posee un caso en el que degenera desde el punto de vista numérico. Si el punto \mathbf{x} en el que se quiere calcular la función de forma está alineado con dos nodos (esto es, en el lado de un triángulo), uno de los puntos auxiliares se va al infinito. Como quiera que en el curso de los cálculos normales en una implementación de Galerkin estos valores se requieren siempre en los puntos de integración y éstos son siempre interiores a los triángulos, no se producen problemas apreciables. Pero es un problema a tener en cuenta si se utiliza alguna otra técnica de integración, donde no se tiene por qué cumplir dicha distribución de los puntos de integración, como se verá más adelante durante el desarrollo de esta tesis.

3.4.2. Algoritmo de Lasserre

El algoritmo de Lasserre comienza por expresar el volumen de un poliedro convexo en la forma de un conjunto de inecuaciones en \mathbb{R}^n , que puede ser definido como sigue

Definición 3.4.1. Consideremos un poliedro convexo definido por

$$\{\mathbf{x} / \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}, \quad (3.4.6)$$

donde \mathbf{x} representa, como es usual, un punto de \mathbb{R}^n , \mathbf{A} es una matriz de dimensión (m, n) y \mathbf{b} es un vector de dimensión m , siendo m el número de restricciones que definen el volumen.

$D(\mathbf{b})$ denota el dominio $\{\mathbf{x} / \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$. El volumen encerrado por el poliedro está dado por

$$V(n, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \tag{3.4.7}$$

Si $D(\mathbf{b})$ está vacío o no tiene ningún punto interior, su volumen es cero. La i -ésima cara del poliedro $D(\mathbf{b})$ se define como

$$\{\mathbf{x} / (a_i \cdot \mathbf{x}) = b_i, \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}, \tag{3.4.8}$$

donde a_i representa la i -ésima columna de \mathbf{A} y $(a_i \cdot \mathbf{x})$ representa el producto escalar en \mathbb{R}^n . Su volumen, en el espacio \mathbb{R}^{n-1} se denota por:

$$V_i(n-1, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \tag{3.4.9}$$

El principal resultado que presenta el método de Lasserre es el siguiente teorema,

Teorema 3.4.1. *Si $V(n, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ es derivable en \mathbf{b} , entonces*

$$V(n, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \left(\frac{b_i}{\|a_i\|} \right) V_i(n-1, \mathbf{A}, \mathbf{b}). \tag{3.4.10}$$

Demostración. El volumen $V(n, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ es una función homogénea y positiva de \mathbf{b} . Entonces, si se aplica el Teorema de Euler sobre funciones homogéneas, se tiene que

$$nV(n, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = (b_i \cdot \nabla V(n, \mathbf{A}, \mathbf{b})).$$

y entonces,

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = \frac{1}{\|a_i\|} V_i(n-1, \mathbf{A}, \mathbf{b}),$$

como queríamos demostrar. □

Nota 3.4.2. Un resultado geométrico conocido es el siguiente: dado un poliedro convexo con un interior no vacío y definido por la intersección de m semiplanos donde m es mínimo (el propio poliedro no puede ser definido por menos de esos m semiplanos) y dado un punto \mathbf{a} cualquiera, entonces

$$\text{Volumen} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^m d(\mathbf{a}, H_i) \times \text{volumen(cara } i). \tag{3.4.11}$$

donde $d(\mathbf{a}, H_i)$ es la distancia algebraica de \mathbf{a} hasta el hiperplano H_i y $\text{volumen}(\text{cara } i)$ representa el volumen en dimensión $d - 1$, siendo d la dimensión del espacio.

En (3.4.10), con $n = d$, $\frac{b_i}{\|a_i\|}$ es la distancia algebraica desde el origen al hiperplano $(a_i \cdot \mathbf{x}) = b_i$, y $V_i(n - 1, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ es el volumen (en dimensión $n - 1$) de la cara i .

Este algoritmo puede ser construido de forma recursiva. Así el cálculo del volumen es realizado en la forma de un árbol binario, empezando por dimensión n y llevando el cálculo de n longitudes en \mathbb{R} . Este volumen puede ser calculado por:

$$V(n, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^m \frac{b_i}{|a_{it}|} V'_{it}(n - 1, \bar{A}_{i,t}, \bar{b}_t) \quad (3.4.12)$$

En esta expresión $\bar{A}_{i,t}$ representa la matriz reducida, obteniéndose de \mathbf{A} mediante eliminación de la t -ésima variable, por medio de la ecuación $a_i x = b_i$. \bar{b}_t es el vector reducido después de esta eliminación y a_{it} el t -ésimo elemento de a_i . V'_{it} representa el volumen en dimensión $n - 1$ obtenido con la matriz reducida $\bar{A}_{i,t}$ y el vector reducido \bar{b}_t . En el trabajo de BRAUN Y SAMBRIDGE [1995] el valor de t es elegido tal que

$$|a_{it}| = \max_j |a_{ij}| \quad (3.4.13)$$

3.5 Imposición de condiciones de contorno esenciales en el *MEN*

Según se traten contornos cóncavos o convexos, las propiedades de aproximación del método de los elementos naturales son diferentes. Esto hace que el *MEN* tenga en lo relativo a la imposición de condiciones de contorno esenciales unas características diferentes a los demás métodos sin malla.

Teorema 3.5.1. *La función de forma del MEN es lineal a lo largo de contornos convexos, mientras que en contornos no convexos no lo es.*

Demostración. SUKUMAR ET AL. [1998], SUKUMAR [1998]. Considérese, por simplicidad, un contorno esencial convexo Γ_u en \mathbb{R}^2 (véase la figura 3.9). Considérese un triángulo con dos nodos en el contorno y un sistema de coordenadas lineal ξ definido entre esos dos nodos, en la figura, 1 y 2. Se supone que el punto ξ tiene solo tres vecinos naturales, aunque la demostración en el caso más general puede realizarse

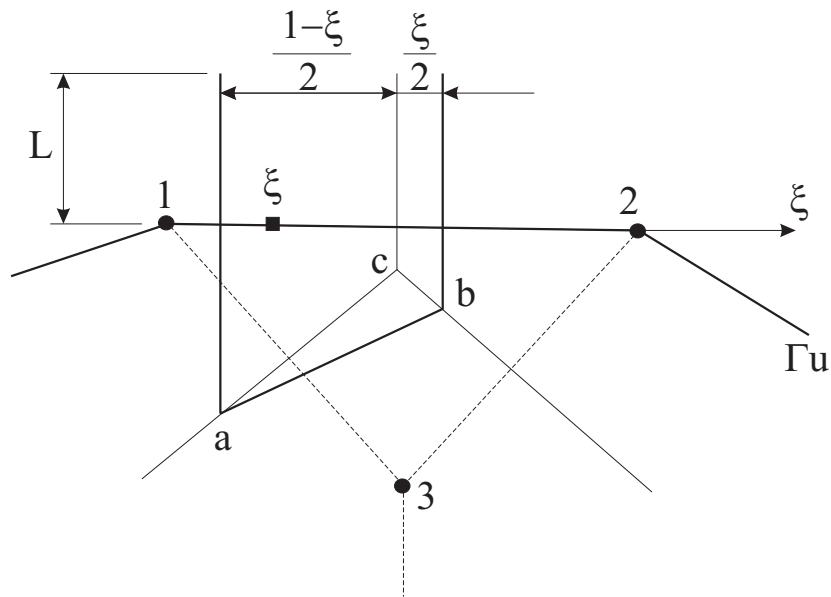


Figura 3.9: Interpolación lineal a lo largo de un contorno convexo Γ_u .

por extensión de ésta de forma directa. Esos nodos vecinos naturales serán en este caso los denominados 1, 2 y 3.

De acuerdo con (3.1.4), la función de forma se puede calcular como

$$\phi_I(\xi) = \frac{A_I(\xi)}{A(\xi)} \quad (I = 1, 2, 3) \quad (3.5.1)$$

donde $A(\xi) = \sum_{J=1}^3 A_J(\xi)$. En la misma figura se puede observar que las celdas de Voronoi en esta parte del dominio no tienen límite superior y por tanto poseen un área no acotada. Por consiguiente, las áreas de la fórmula (3.5.1) se pueden expresar como

$$A_1(\xi) = \lim_{L \rightarrow \infty} L \frac{1-\xi}{2} + \delta_1, \quad A_2(\xi) = \lim_{L \rightarrow \infty} L \frac{\xi}{2} + \delta_2, \quad A_3 = \delta_3 \quad (3.5.2)$$

donde las δ_I representan áreas finitas. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L(1 - \xi) + 2\delta_1}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3} \\ \phi_2(\xi) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L\xi + 2\delta_2}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3} \\ \phi_3(\xi) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\delta_3}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3}\end{aligned}\tag{3.5.3}$$

y resolviendo esos límites

$$\phi_1(\xi) = 1 - \xi, \quad \phi_2(\xi) = \xi, \quad \phi_3(\xi) = 0\tag{3.5.4}$$

□

Se puede ver entonces que, debido al hecho de que las áreas asociadas a nodos en el contorno tienen un área infinita, la contribución de los nodos interiores en esta zona se hace nula. Siguiendo este mismo razonamiento, se puede observar cómo esta propiedad no es extensible a dominios no convexos. En ese caso, la contribución de nodos interiores se hace no despreciable frente a la de los nodos exteriores. En el trabajo de SUKUMAR ET AL. [1998], SUKUMAR [1998] se hace referencia a que los errores debidos a esta causa rondarían un 2 %.

3.5.1. El *MEN* basado en formas α

A continuación se introduce el concepto de forma α y su influencia en el método de los elementos naturales, véase CUETO [2001]. Las funciones α surgen como respuesta a la siguiente pregunta: ¿contiene una nube de puntos, sin ningún tipo de conectividad establecida a priori entre ellos, información acerca de la forma real del dominio sobre el que están distribuidos? La respuesta la dieron EDELSBRUNNER ET AL. [1983] y EDELSBRUNNER Y MÜCKE [1994], estableciendo el concepto de forma α .

Formas α de una nube de puntos

Las formas α están relacionadas con la triangulación de Delaunay, que se considera como estructura fundamental de la nube de puntos. La triangulación de Delaunay está definida siempre sobre la envoltura convexa de la nube, es decir, sobre el más pequeño de los polítopos (porción del espacio limitada por un poliedro) convexos que pueden definirse conteniendo a todos los puntos.

Conceptualmente, las formas α son una generalización de la envoltura convexa de un conjunto de puntos.

Definición 3.5.1. Sea S un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^3 . Sea también $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, \infty)$. Se denomina α -esfera a la esfera abierta de radio α . Una α -esfera b se dice vacía si $b \cap S = \emptyset$.

Se denomina k -símplex, σ_T a la envoltura convexa de un subconjunto de S , $T \subset S$ tal que, $|T| = k + 1$, con $0 \leq k \leq 3$ (nótese que un 2-símplex es un triángulo y un 3-símplex es un tetraedro sólo si se acepta lo que Edelsbrunner denomina en su trabajo *posición general* de los puntos, es decir, que no hay cuatro puntos en un plano ni cinco en una esfera).

Definición 3.5.2. Sea S un conjunto finito de puntos en \mathbb{R}^3 , y sea $T \subset S$ un subconjunto de S , tal que $|T| = k + 1$, con $0 \leq k \leq 3$. Se dice que un k -símplex σ_T está α -expuesto si existe una α -esfera vacía b , con $T = \partial b \cap S$, donde ∂b es la esfera o plano que limita a b .

Definición 3.5.3. Dado un valor $\alpha \in \mathbb{R}$ se denota por $F_{k,\alpha}$ al conjunto de k -símplex α -expuestos, con $0 \leq \alpha \leq 2$. Los k -símplex en $F_{k,\alpha}$ se denominan k -caras de S_α .

Definición 3.5.4. Se define la Forma α de S , y se denota por \mathcal{S}_α , al politopo cuyo contorno está formado por los triángulos de $F_{2,\alpha}$, las aristas de $F_{1,\alpha}$ y los vértices de $F_{0,\alpha}$.

Con la definición anterior se tendría bien definido el contorno, pero no qué parte de $\mathbb{R}^3 \setminus \partial \mathcal{S}_\alpha$ está dentro de \mathcal{S}_α y cual está fuera.

Proposición 3.5.2. Fijado un valor α cualquiera, para cada triángulo α -expuesto existen dos α -esferas (no necesariamente vacías) b_1 y b_2 tales que $b_1 \neq b_2$, $T \subseteq \partial b_1$ y $T \subseteq \partial b_2$. Si las dos esferas están vacías entonces el triángulo no pertenece al contorno del interior de S_α . Si una de las esferas estuviera vacía y la otra no, entonces el triángulo limitaría el interior de S_α .

La “sencillez” del concepto de forma α se pone de manifiesto en el ejemplo de la figura 3.10, que presenta la evolución de la misma para una nube de puntos extraída de la geometría de una mandíbula humana. Se presentan la nube de puntos original (es decir, \mathcal{S}_0), las formas $\mathcal{S}_{1,0}$, $\mathcal{S}_{1,5}$, $\mathcal{S}_{3,5}$ —donde se representa la forma

óptima de la geometría de la mandíbula que forman la nube de puntos— y \mathcal{S}_∞ , que es la envoltura convexa de la nube de puntos que se ha considerado. Si existe una nube de puntos suficientemente densa, es fácil encontrar un valor α que determina una geometría precisa del dominio.

A continuación se presentan distintas definiciones que permitirán un adecuado desarrollo para describir la imposición de condiciones esenciales de contorno en el *MEN* mediante formas α .

Definición 3.5.5. Se define el concepto de complejo simplicial \mathcal{C} , como una colección de k -símplex cerrados ($0 \leq k \leq 3$) que satisface:

- (i) Si $\sigma_T \in \mathcal{C}$, entonces $\sigma_{T'} \in \mathcal{C}$ para todo $T' \subseteq T$
- (ii) Si $\sigma_T, \sigma_{T'} \in \mathcal{C}$ entonces, o bien $\sigma_T \cap \sigma_{T'} = \emptyset$ ó $\sigma_T \cap \sigma_{T'} = \sigma_{T \cap T'}$

Definición 3.5.6. Considérese ahora un símplex σ_T , limitado por una esfera b_T de radio ϱ_T . Para $1 \leq k \leq 3$ y $0 \leq \alpha < \infty$ se definen los conjuntos $G_{k,\alpha}$ como la unión de los k -símplices $\sigma_T \in Del(S)$ para los cuales b_T está vacía y $\varrho_T < \alpha$. $G_{0,\alpha}$ se define idénticamente igual a N .

Definición 3.5.7. Se define entonces el α -complejo de N , $\mathcal{C}_\alpha(N)$ como el complejo simplicial cuyos k -símplex pertenecen a $G_{k,\alpha}$ o bien limitan $(k + 1)$ -símplex de \mathcal{C}_α .

El espacio *subyacente* de \mathcal{C}_α , $|\mathcal{C}_\alpha|$, sería entonces la unión de todos los símplex de \mathcal{C}_α . La importancia de los α -complejos viene dada por la relación

$$\mathcal{S}_\alpha = |\mathcal{C}_\alpha| \quad \forall \alpha \in [0, \infty) \tag{3.5.5}$$

la cual pone de manifiesto que una forma α es triangulada por un subconjunto de la triangulación de Delaunay.

Para una descripción más extensa referente a las formas α y su algorítmica, se propone al lector la consulta de EDELSBRUNNER Y MÜCKE [1994].

Imposición de condiciones esenciales de contorno en el *MEN* mediante formas α

Se ha visto anteriormente que el hecho de que las celdas de Voronoi asociadas a nodos en contornos convexos no tengan área acotada proporciona el deseado carácter

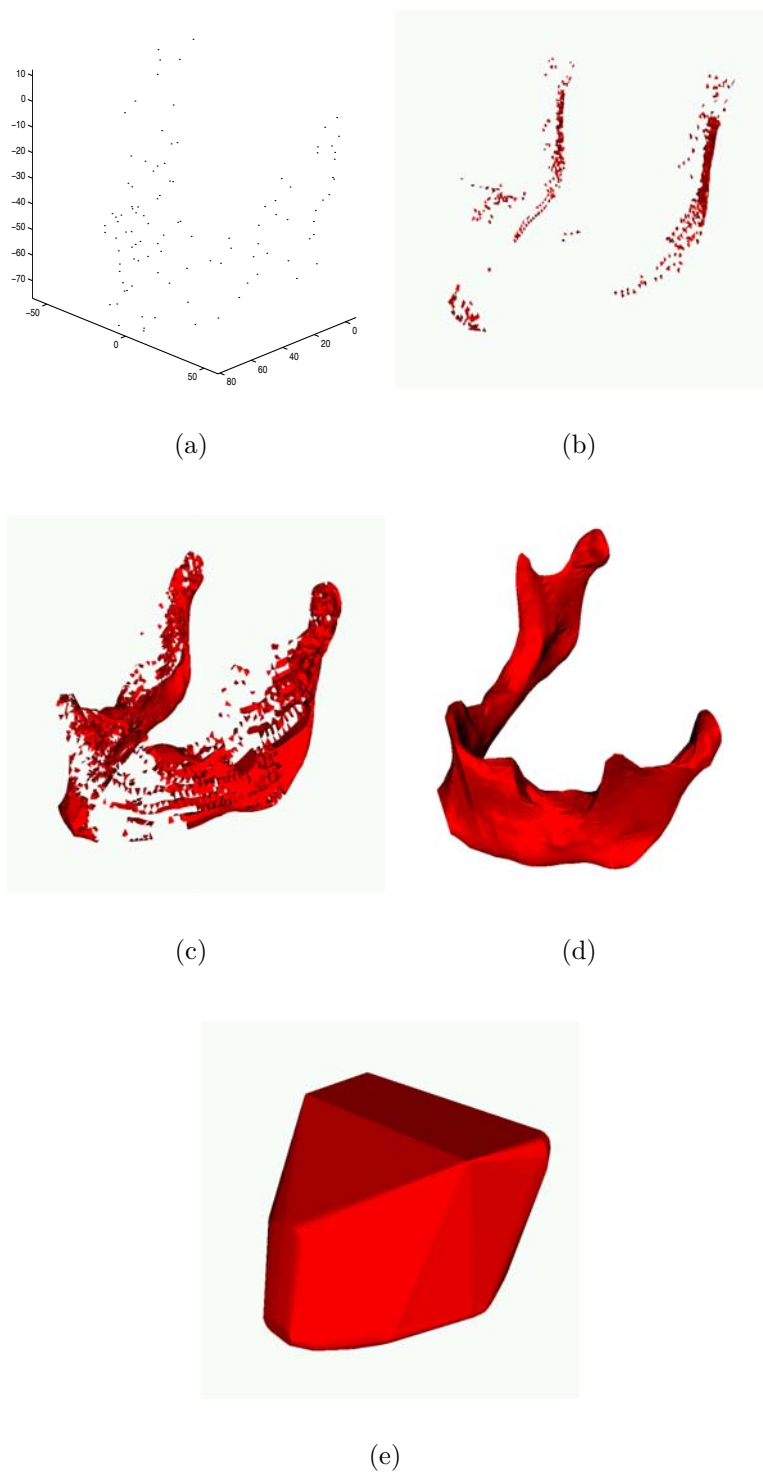


Figura 3.10: Evolución de la forma α de una nube de puntos repartida por la geometría de una mandíbula. Formas \mathcal{S}_0 (a), $\mathcal{S}_{1,0}$ (b), $\mathcal{S}_{1,5}$ (c), $\mathcal{S}_{3,5}$ (d) y \mathcal{S}_∞ (e).

interpolante en el contorno. Dado que esta circunstancia no se da en las celdas asociadas a nodos situados en contornos cóncavos, el valor del interpolante en esas zonas depende además del valor en nodos interiores al dominio. La interpolación por vecinos naturales pierde así el carácter interpolante en estos contornos.

La solución propuesta en CUETO ET AL. [2000] parte de una conocida propiedad de los vecinos naturales. Si dos nodos son vecinos naturales, forman los extremos de un lado de un triángulo de Delaunay y comparten un segmento de una celda de Voronoi. De la misma forma, si se introduce un nodo \mathbf{x} en la triangulación, sus vecinos serán aquellos que formen con él los nuevos triángulos. La forma α permite restringir esta vecindad a nodos distantes hasta un determinado valor α . Se propone así una nueva definición para la celda de Voronoi:

Definición 3.5.8. La celda de Voronoi modificada de primer orden se define como sigue

$$T_I = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / d(\mathbf{x}, n_I) < d(\mathbf{x}, n_J) \wedge \sigma_T \in \mathcal{C}_\alpha(N)\} \forall J \neq I \quad (3.5.6)$$

donde σ_T es el k -símplex formado por los nodos n_I, n_J y cualquiera del resto de los nodos de N, n_K . $\mathcal{C}_\alpha(N)$ es el α -complejo asociado al dominio que se desea reproducir.

Nota 3.5.1. Nótese que en esta propuesta la vecindad ya no está asociada a la celda de Voronoi en el sentido clásico, dado que estas nuevas celdas tienen intersección no vacía fuera del dominio. De esta forma, un punto en el espacio puede estar asociado a más de una celda, contrariamente a lo que sucede con las celdas de Voronoi.

Sí se mantiene la propiedad de que dos nodos que son vecinos forman un lado de un triángulo en $\mathcal{C}_\alpha(N)$.

Definición 3.5.9. Del mismo modo que en la forma estándar del método, las coordenadas de vecino natural de un punto respecto al nodo n_I se definen como la relación del área de la celda T_I transferida a T_x respecto al área de T_x . Esta forma de vecindad da lugar a lo que se denominó en la citada referencia (CUETO ET AL. [2000]) *método de los Elementos Naturales basado en formas α ó MEN- α* .

Proposición 3.5.3. *La definición anterior da lugar a un interpolante lineal en el contorno.*

Demostración. (CUETO ET AL. [2000]) Considérese un conjunto N de nodos distribuidos en una estructura regular tal y como se indica en la figura 3.11.

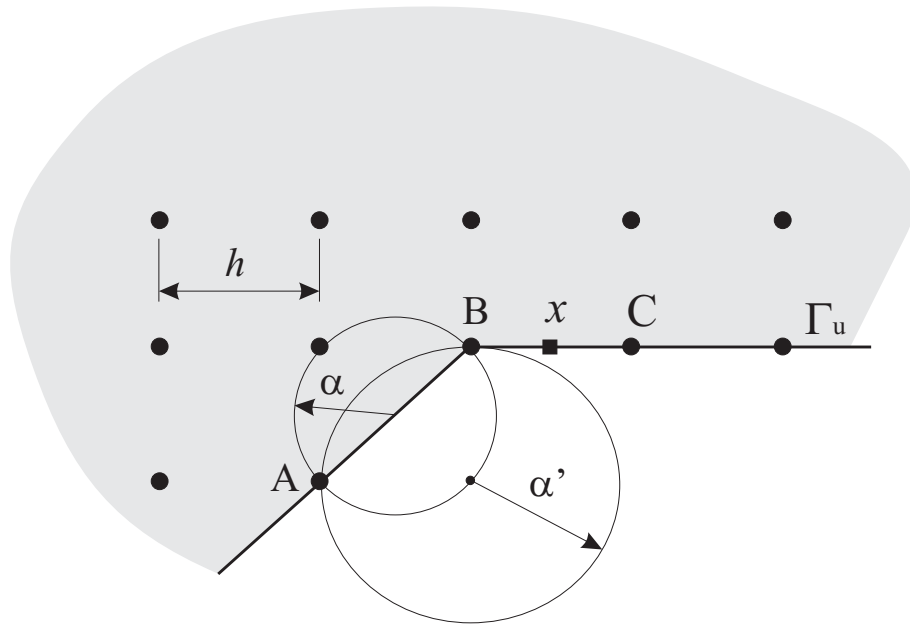


Figura 3.11: Linealidad del interpolante en un contorno cóncavo.

Dado un contorno cóncavo Γ_u donde se han prescrito unas determinadas condiciones de contorno esenciales $\mathbf{u} = g(\mathbf{x})$. Siendo la separación entre nodos h , el valor del parámetro α apropiado sería $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}h$ (distancia de la diagonal entre nodos). Un valor mayor de α podría dar lugar a una forma α en la que el nivel de detalle deseado no fuese suficiente, redondeando el ángulo que se quiere reproducir en el nodo B .

Sea $\mathbf{x} \in \Gamma_u$ un punto en el que se quiere determinar el valor del interpolante. Para una imposición adecuada de las condiciones de contorno en este punto \mathbf{x} debe conseguirse que éste tenga una celda asociada no acotada. De esta forma, la influencia de los puntos interiores sobre él se hace despreciable, como se ha comentado anteriormente y se deduce de la relación (3.5.1.)

Para que esto ocurra, el nodo A , que en una triangulación de Delaunay sería vecino de \mathbf{x} , y haría que su celda asociada tuviese un área finita, no debe estar asociado a \mathbf{x} . La peor situación sería que el punto \mathbf{x} estuviese cerca de B . En el límite, la α -esfera (círculo, en este caso) b que haría que A , B y \mathbf{x} fuesen vecinos (es decir, que pertenecieran a $\mathcal{C}_\alpha(N \cup \mathbf{x})$) tendría un radio $\alpha' = h > \alpha$.

Para ver cómo modifica esta nueva definición el diagrama de Voronoi, considérese una situación similar a la dibujada en la figura 3.11. En la figura 3.12(a) se muestra la celda de Voronoi del nodo 2. Supóngase que el triángulo 123 se ha

eliminado de la triangulación de Delaunay para cumplir con el criterio α . Dado que no se permite la vecindad de ningún punto a lo largo del segmento 1 – 2 con el nodo 3, la nueva celda de Voronoi asociada a cualquier punto ξ a lo largo de 1 – 2 se vuelve no acotada. La continuidad de la función de forma resultante se aprecia en la figura 3.13.

Esta solución es válida siempre que el ángulo formado por los segmentos \overline{AB} y \overline{BC} sea mayor de 90° . En el caso de la simulación de grietas, por ejemplo, este método debería ser sustituido por una triangulación conforme de Delaunay, pues resulta imposible aportar información sobre el frente de una grieta (con un radio de curvatura idealmente nulo) con nodos solamente, pues haría falta que la separación entre éstos fuese, en el límite, cero. Esto sería, de hecho, un segmento.

La función de forma resultante, asociada al nodo B puede verse en la figura 3.13, observándose la linealidad a lo largo de los segmentos de Γ_u , así como el valor unidad en B . \square

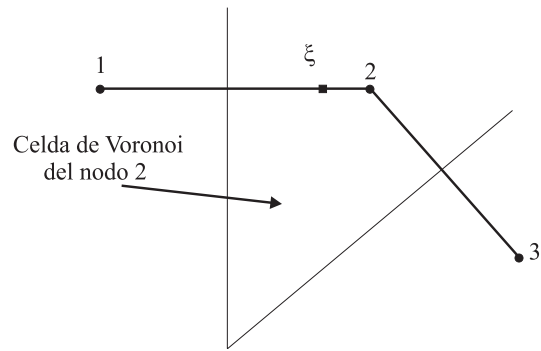
Nota 3.5.2. En esta tesis, tal y como se ha comentado anteriormente, la función de forma se calcula tanto con arreglo al algoritmo de WATSON [1994] como al de LASSERRE [1983] en el caso de problemas en dos dimensiones. No representa, por tanto, ninguna modificación a los algoritmos que se describieron en la sección 3.4. Ambos exigen almacenar los triángulos de Delaunay, su circuncentro y circunradio. Se construye una lista de los vecinos naturales para cada nodo, determinando simplemente si se cumple la ecuación

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2 < R^2 \quad (3.5.7)$$

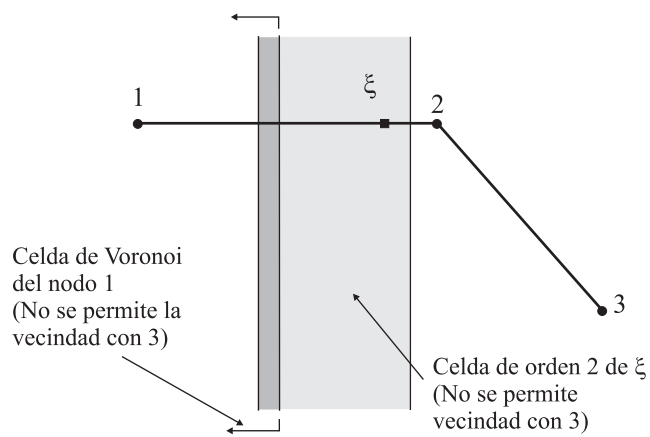
donde \mathbf{v} representa al circuncentro del triángulo en consideración, \mathbf{x} el punto donde se desea conocer el valor de la función de forma y R el radio del circuncírculo. Si esta relación se da, el punto \mathbf{x} y los tres nodos que definen el triángulo cuyo circuncentro es \mathbf{v} serían vecinos.

Desde los primeros trabajos en métodos sin malla, como ORGAN ET AL. [1996], se puso de manifiesto que el cálculo de la distancia entre nodos (equivalente a la noción de vecindad natural en el MEN) no debe realizarse a través de una porción del espacio \mathbb{R}^n que esté fuera del dominio del problema Ω . De esta forma, si el vector que une dos nodos atraviesa el contorno del dominio, éste debe descomponerse en dos o más tramos que caigan enteramente en el interior del dominio, dando lugar a funciones de forma discontinuas.

Tampoco en el trabajo de SUKUMAR [1998], SUKUMAR ET AL. [1998] se ha



(a) Celda de Voronoi estándar



(b) Celda de Voronoi modificada

Figura 3.12: Efecto de la nueva definición de vecindad en el cálculo de la celda de Voronoi.

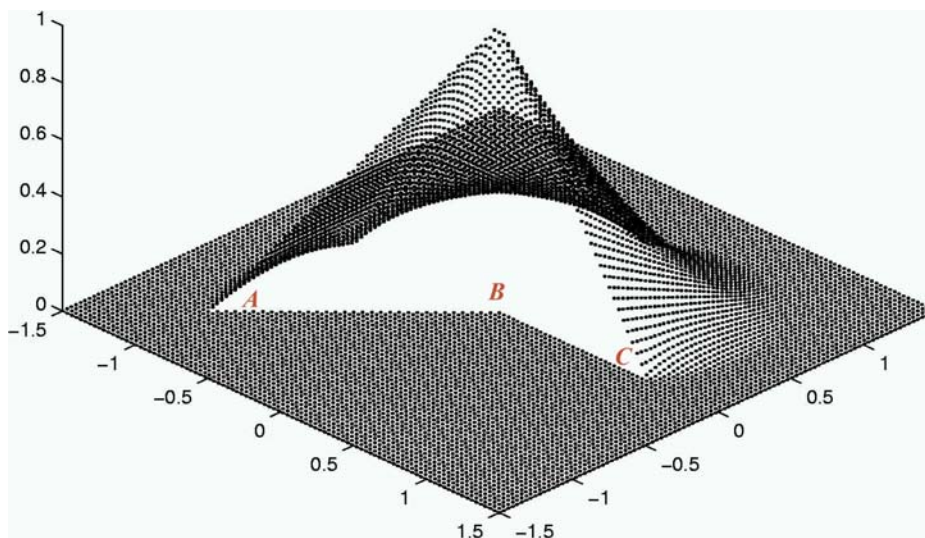


Figura 3.13: Función de forma asociada a un nodo de un contorno cóncavo.

tenido en cuenta este problema, limitándose solo al análisis de la linealidad del interpolante en el contorno. Nuevamente, la definición del interpolante sobre una forma α asegura el establecimiento de la vecindad de una manera apropiada, impidiendo que los nodos estén relacionados a través de porciones del espacio no comprendidas en el dominio.

3.5.2. El método de elementos naturales restringido *C-NEM*

El método *C-NEM* constituye una nueva modificación del *MEN* que permite describir movimientos de interfases y discontinuidades en nubes de nodos fijas. A continuación se describe el diagrama de Voronoi restringido, usado para el cálculo de funciones de forma del *C-NEM* en cualquier dominio. La diferencia fundamental entre el α -*MEN* y el *C-NEM* radica en que este último utiliza una colección de segmentos que se consideran “opacos” para describir el contorno del dominio.

Diagrama de Voronoi Restringido

Ya ha sido comentada la pérdida de linealidad que presenta el *MEN* en la interpolación a lo largo de contornos de dominios no convexos. Esta nueva versión recupera todas las propiedades que presenta el *MEN* para cualquier tipo de geometría (incluyendo dominios no convexos conteniendo grietas o discontinuidades). El cálculo de las funciones de forma está basado en el denominado Diagrama de

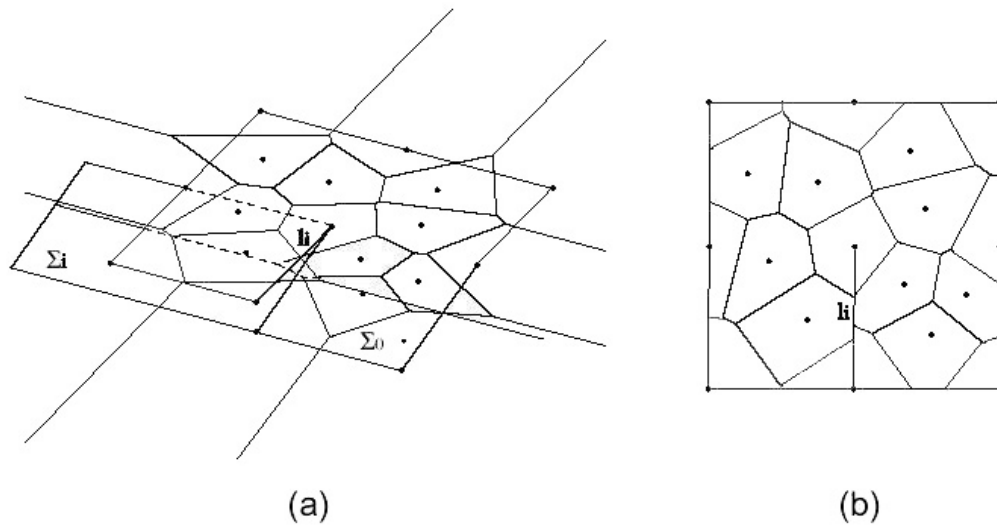


Figura 3.14: (YVONNET ET AL. [2003c]) Interpretación del diagrama de Voronoi restringido. (a) Vista esquemática del *DVR*. (b) Intersección entre el *DVR* y la clausura del dominio.

Voronoi Restringido (o extendido) (*DVR*), introducido por SEIDEL [1988].

Se introduce un criterio de visibilidad para restringir la vecindad natural de nodos próximos al contorno o a una discontinuidad en el dominio, como puede ser una grieta. Al igual que las triangulaciones de Delaunay, cada triangulación de Delaunay restringida tiene su correspondiente diagrama de Voronoi, pero en una superficie que es más complicado que en el espacio Euclídeo.

Considérese \mathbb{R}^2 como una lámina de papel, Σ_0 , con los puntos de S y los segmentos que definen el contorno en un conjunto L , dibujados en dicho papel. Para cada $l_i \in L$, se corta Σ_0 a lo largo de l_i y se le añade otra lámina Σ_i , la cual también se corta a lo largo de l_i . La unión está bien definida, de tal forma que si se quiere pasar de un lado a otro de l_i , se pasa de Σ_0 a Σ_i y viceversa, tal y como se muestra en la figura 3.5.2 (a).

Definición 3.5.10. Se denomina a Σ_0 *lámina primaria*, mientras que con el término *lámina secundaria* se denomina a cada una de las $m = \text{card}(L)$ uniones Σ_i para $1 \leq i \leq m$. Cada una de las láminas secundarias están adjuntas a Σ_0 , pero no están conectadas con ninguna otra lámina secundaria. Para cada punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, se tienen $m + 1$ copias $\mathbf{x}_i \in \Sigma_i$, una en cada lámina secundaria.

Definición 3.5.11 (Criterio de Visibilidad). Para $i \neq 0$, los puntos $\mathbf{x}_0 \in \Sigma_0$ e $\mathbf{y}_i \in \Sigma_i$ son visibles si $\mathbf{x}\mathbf{y}$ cruza l_i , y l_i es el primer segmento cruzado si se quiere atravesar $\mathbf{x}\mathbf{y}$ en la dirección de \mathbf{x} a \mathbf{y} .

La distancia entre los puntos \mathbf{x}_0 y \mathbf{y}_i se define como

$$d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_i) = \begin{cases} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, & \text{si } \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_i \text{ son visibles} \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.5.8)$$

Esta nueva función distancia se usa para definir el diagrama de Voronoi Restringido.

En la figura (b) de 3.5.2, se representa la intersección entre el *CVD* y la clausura del dominio. El resultado es un diagrama compuesto por celdas T_I^C , una por cada nodo n_I , tal que cada punto \mathbf{x} en el interior de T_I^C está más cerca de n_I que de cualquier otro nodo n_J visible para \mathbf{x} . Definimos así cada celda del diagrama de Voronoi Restringido, formalmente

Definición 3.5.12. Se define la celda de Voronoi Restringida de un nodo n_I a

$$T_I^C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J), \forall J \neq I, S_{\mathbf{x} \rightarrow n_I} \cap \Gamma = \emptyset, S_{\mathbf{x} \rightarrow n_J} \cap \Gamma = \emptyset\} \quad (3.5.9)$$

donde Γ es el contorno del dominio, compuesto por segmentos $l_i \in L$ y $S_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}}$ denota el segmento situado entre los puntos \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Aproximación mediante el método de elementos naturales restringido

Se considera la siguiente aproximación de una variable cualquiera T en un punto \mathbf{x} ,

$$T_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^V \phi_i^C(\mathbf{x}) T_i \quad (3.5.10)$$

donde V es el número de vecinos naturales visibles desde el punto \mathbf{x} y ϕ_i^C es la función de forma de vecinos naturales restringidos, relativa al nodo i -ésimo en el punto \mathbf{x} . El cálculo de estas funciones de forma es similar al descrito anteriormente para la *MEN*, introduciendo previamente el diagrama de Voronoi restringido. En YVONNET ET AL. [2003b] y en YVONNET ET AL. [2003a] se ha demostrado que el uso del diagrama de Voronoi restringido no afecta a las propiedades de la interpolación del *MEN*, permitiendo la extensión de la linealidad de las funciones de forma en el contorno del dominio convexo, a cualquier geometría, convexa o no. En cierto modo,

los criterios de vecindad establecidos por el α -*MEN* y por el *C-NEM* pueden ser vistos como *duales* ya que cada uno establece las limitaciones de vecindad en las dos estructuras fundamentales, es decir, en la triangulación de Delaunay y en el diagrama de Voronoi, respectivamente.

3.6 Problemática del *MEN*

Un aspecto de todos los métodos sin malla, y en particular del método de los Elementos Naturales, es que utilizan una malla de fondo a la hora de integrar la formulación débil sobre el dominio. La particularidad de las funciones de forma del *MEN*, con un soporte formado por la unión de varias circunferencias, véase la figura 3.5, determinan un dominio de integración que no se puede reproducir fielmente con una malla de triángulos (en el caso bidimensional). Para solucionar esta pérdida de precisión se proponen en el capítulo 4 dos estrategias a seguir, la primera basada en la descomposición del dominio a integrar, en triángulos y segmentos circulares. La segunda, sin embargo, sigue una técnica de integración nodal, propuesta inicialmente por CHEN ET AL. [2001a].

Además de los problemas de exactitud derivados de la integración numérica (ya puestos de manifiesto por SUKUMAR ET AL. [1998]) quedan por solucionar otros muchos aspectos del método antes de que pueda ser considerado una técnica competitiva con el *MEF* en muchos ámbitos. Uno de ellos sería, por ejemplo, el de la obtención de una aproximación que no presente bloqueo para materiales incompresibles (o, equivalentemente, para problemas con una restricción adicional de divergencia de la solución, nula en el dominio).

En el capítulo 5 se presenta un estudio de la viabilidad de la aplicación del método de los elementos naturales (*MEN*) al problema del comportamiento en el límite de incompresibilidad. En él, se desarrolla un modelo de Elementos Naturales mixtos (con formulación en desplazamientos y presiones), enriqueciendo los campos de desplazamientos. Se demuestra que esta formulación cumple satisfactoriamente la condición Ínfimo-Supremo (también conocida como *inf-sup* o *LBB*), que garantiza que dicho elemento no presenta bloqueo alguno ante situaciones cercanas a la incompresibilidad.

INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS NATURALES

En este capítulo se tratan cuestiones relativas a la integración numérica del sistema de ecuaciones discreto surgido del método de los Elementos Naturales, comentado en el capítulo anterior. Se han investigado los diversos motivos de error que ofrece el uso de los propios triángulos de Delaunay como celdas de integración mediante cuadraturas de Hammer. Dos son las soluciones posibles que se han estudiado a lo largo de esta tesis: en primer lugar, una aproximación “local” en la cual el soporte de las funciones de forma se descompone en triángulos y segmentos circulares, que ha mostrado finalmente un nivel de precisión bajo. En segundo lugar, se muestra un esquema nodal estabilizado que muestra una exactitud muy alta, muy apropiado en los métodos Galerkin de aproximación por vecinos naturales. La razón de la observada divergencia en el comportamiento de estas dos técnicas se estudia también en este capítulo.

Los errores en la evaluación numérica de la forma débil del problema se producen en todos los métodos sin malla y son bien conocidos desde los primeros trabajos en este tema, como DOLBOW Y BELYTSCHKO [1999] ó DE Y BATHE [2001b]. A primera vista existen dos razones que podrían explicar este comportamiento. La primera de ellas es el carácter no polinomial de las funciones de forma, que deriva precisamente del uso de nuevas técnicas de interpolación en los métodos sin malla. La segunda se identifica con el uso de celdas de integración que no reproducen fiel-

mente el soporte de las funciones de forma, como se ha comentado. En este capítulo se analiza la importancia relativa de cada una de estas dos fuentes de error, para el caso particular del método de los elementos naturales. El capítulo concluye con diversos ejemplos en los cuales se muestran las técnicas propuestas y sus resultados.

4.1 Integración numérica de métodos de Galerkin de vecindad natural

La integración de la forma débil de un problema variacional debe ser hecha, por razones obvias, de una forma numérica más que analítica. Es decir, las integrales son calculadas en la forma:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega \approx \sum_{i=1}^{n_q} f(\boldsymbol{\xi}_i)w_i \quad (4.1.1)$$

donde n_q es el número de puntos de cuadratura, $\boldsymbol{\xi}_i$ son las coordenadas de cuadratura, y w_i son los coeficientes de peso correspondientes a los puntos $\boldsymbol{\xi}_i$. Es bien conocido por ejemplo que una regla de Gauss de orden n_q integra exactamente polinomios de orden $2n_q - 1$. El cálculo apropiado de esas integrales es una cuestión importante a la hora de asegurar la convergencia de los métodos Galerkin.

La mayoría de los métodos sin malla, y también los Elementos Finitos, usan una malla de fondo con celdas de cuadratura para realizar la integración. En el método de los Elementos Finitos esas celdas surgen de forma natural, se identifican con los propios elementos. Por el contrario, en los métodos sin malla basados en el método de Galerkin no está disponible una estructura “elemental” y tales celdas deben ser construidas sobre la malla de fondo. En el método Element Free Galerkin de BELYTSCHKO ET AL. [1994], visto en la sección 2.6, por ejemplo, esas celdas son usualmente cuadrados, excepto en el contorno del dominio, donde deben ajustarse a éste. En trabajos previos de métodos de Elementos Naturales como SUKUMAR ET AL. [1998], SUKUMAR ET AL. [2001], CUETO ET AL. [2000], CUETO ET AL. [2002], se usan los triángulos de Delaunay como malla de fondo.

4.1.1. Errores en la integración numérica

Existen dos fuentes de error en la integración numérica de la forma débil en el método de Galerkin, puestas de manifiesto por DOLBOW Y BELYTSCHKO [1999],

- (1) Las funciones de forma de los métodos sin malla no son polinomiales. En los métodos *EFG*, las funciones de forma son racionales y en los métodos de elementos naturales, frecuentemente también.
- (2) Las celdas de la malla de fondo mencionada anteriormente no se ajustan al soporte de las funciones de forma. Este último aspecto se conoce como una importante fuente de error desde DOLBOW Y BELYTSCHKO [1999]. Sin embargo, el primer aspecto ha recibido menor atención.

En este último aspecto, se han llevado a cabo hasta el momento dos aproximaciones principales. En DOLBOW Y BELYTSCHKO [1999] se ha diseñado un algoritmo de construcción de celdas de fondo que reproducen exactamente el soporte de las funciones de forma construidas sobre un producto tensorial de las funciones de peso (con un soporte rectangular).

En esta tesis se han seguido aproximaciones similares a las realizadas por ATLURI ET AL. [1999], ATLURI Y ZHU [2000] y también por las realizadas por DE Y BATHE [2001c], DE Y BATHE [2001b]. Atluri basa su método en una forma débil *local*, es decir, para la ecuación de equilibrio del problema de la elastostática lineal, comentada en (3.2.1), desarrolla una forma débil de la siguiente forma para cada nodo:

$$\int_{\Omega_I} (\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \delta \mathbf{v} d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_u^I} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \delta \mathbf{v} d\Gamma = 0 \quad (4.1.2)$$

donde Ω_I representa la intersección del soporte del nodo con el dominio Ω y Γ_u^I la correspondiente intersección del soporte del nodo y la frontera esencial. $\delta \mathbf{v}$ representa la función de ponderación y α un parámetro de penalización. Obsérvese cómo las condiciones de contorno esenciales están impuestas mediante un método de penalización. Después de la aplicación del teorema de la divergencia, se obtiene la llamada “Forma débil simétrica local” (*LSWF*) (véase ATLURI ET AL. [1999]).

Nótese también como este tipo de forma débil local define un esquema de integración numérica que se desarrolla de una forma nodal, y así el soporte de sus funciones de forma surge naturalmente como la celda de integración. Este tipo de integración necesita una formulación de cuadratura *ad hoc* para realizar una integración apropiada sobre los círculos cortados por el contorno. Usualmente la integración se realiza determinando la forma final del soporte de las funciones de forma mediante círculos, semicírculos y triángulos.

DE Y BATHE [2001b] también desarrollan una formulación de cuadratura en el método de las esferas finitas subdividiendo los soportes (es decir, las esferas) en subdominios en los cuales la integración numérica es mucho más fácil. Esta aproxi-

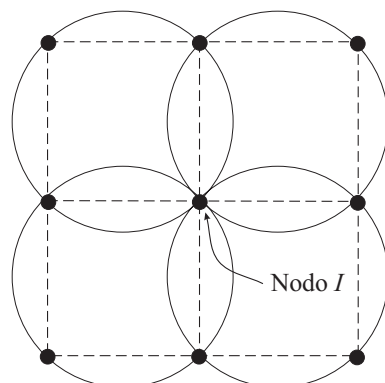


Figura 4.1: Soporte de la función de forma asociada con el nodo I .

mación ha sido también probada durante el desarrollo de este trabajo. En la siguiente sección (4.2) se presenta y se analiza un algoritmo de integración numérica basado en la descomposición del soporte de las funciones de forma para métodos Galerkin de Vecindad Natural.

4.2 Una aproximación basada en la descomposición del soporte para métodos de Galerkin de vecindad natural

Proposición 4.2.1. *En el MEN, el soporte de las funciones de forma está usualmente formado por la unión de un número de círculos. Éstos son los circuncírculos de aquellos triángulos de Delaunay a los que pertenece el nodo considerado.*

Demostración. FARIN [1990] Es sencillo comprobarlo de una manera gráfica tal y como muestra la figura 4.1. Por definición, el soporte de la función de forma estará compuesto por aquellos puntos vecinos naturales del nudo en cuestión. Éstos son los puntos comprendidos en el circuncírculo de cada triángulo que contiene al nudo considerado. \square

Como se puede ver, tanto el soporte del nodo como la intersección de dos soportes pueden ser descompuestos en un conjunto de triángulos y segmentos circulares. El establecimiento de un esquema de integración que se realice sobre los soportes anteriores (o sobre subconjuntos de los mismos) exige el establecimiento de cuadraturas sobre este tipo de geometrías. Como se desprende de la figura 4.1 los soportes de las funciones de forma se descomponen fácilmente en triángulos y

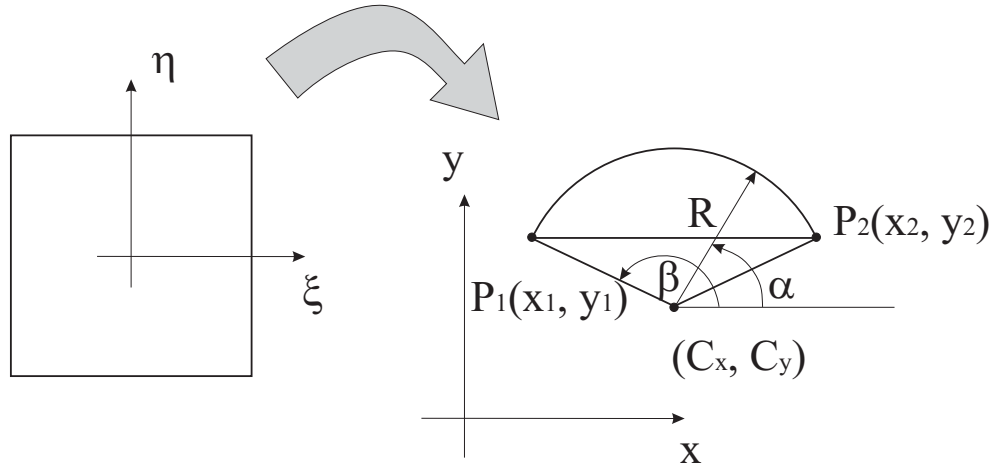


Figura 4.2: Transformación propuesta para la integración sobre un sector circular.

segmentos circulares. La integración sobre triángulos es bien conocida. Por tanto, solo resta el establecimiento de reglas de cuadratura para los segmentos circulares. En los triángulos, se han probado tanto cuadraturas de Gauss como de Hammer, mientras en los sectores circulares se ha usado una transformación punto a punto entre los sectores circulares y un cuadrado unidad.

La integración numérica de la forma débil del problema (ecuación (3.2.5) anterior) se ha desarrollado sobre las intersecciones de los soportes de dos funciones de forma, es decir,

$$\sum_I \sum_J \int_{\Omega_{IJ}} \nabla^s \delta \mathbf{v} : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{u} d\Omega = \sum_I \sum_J \int_{\Omega_{IJ}} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma, \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.2.1)$$

donde Ω_{IJ} es un subconjunto del dominio Ω , definido como

$$\Omega_{IJ} = \text{sop}(\mathbf{x}_I) \cap \text{sop}(\mathbf{x}_J) \cap \Omega.$$

Para la integración sobre los segmentos circulares, se ha propuesto la siguiente transformación (véase la figura 4.2):

$$x = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (1 - \eta) \left(x_1 (1 - \xi) + x_2 (1 + \xi) \right) + (1 + \eta) \left[C_x + R \cos \left(\frac{1}{2} (1 - \xi) \beta + (1 + \xi) \alpha \right) \right] \right] \quad (4.2.2)$$

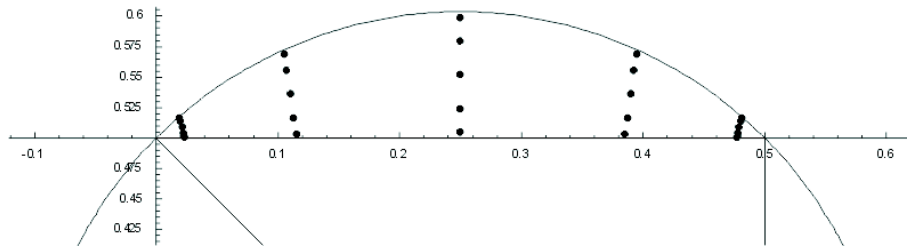


Figura 4.3: Resultado de la transformación de una cuadratura de Gauss de 5×5 puntos sobre un cuadrado en un segmento circular.

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(1-\eta) \left(y_1(1-\xi) + y_2(1+\xi) \right) + (1+\eta) \left[C_y + R \sin \left(\frac{1}{2}(1-\xi)\beta + (1+\xi)\alpha \right) \right] \right] \quad (4.2.3)$$

En la figura 4.3 se muestra un ejemplo de la transformación entre una cuadratura de Gauss de 5×5 puntos sobre el cuadrado unidad y un segmento circular. Los resultados para este tipo de integración numérica y para varios números de puntos de cuadraturas se presentan a continuación en la aplicación al *patch test* (o criterio de la parcela).

4.2.1. *Patch tests* 2D con el método de descomposición del soporte

Definición 4.2.1 (*Patch Test*). El *patch test* o también conocido como Criterio de la Parcela (IRONS Y RAZZAQUE [1972]), fue diseñado para probar la convergencia en las formulaciones de Elementos Finitos no conformes. En esencia, el test consiste en la imposición de un campo de desplazamientos conocido —usualmente lineal— sobre el contorno de una parcela de elementos. El test se considera correcto si el campo prescrito es reproducido dentro de la parcela.

En varios trabajos previos tratando con la integración numérica en métodos de Galerkin sin malla, como SUKUMAR ET AL. [1998] y DOLBOW Y BELYTSCHKO [1999], se ha analizado la conveniencia de utilizar el *patch test* para asegurar la precisión de la cuadratura. De hecho, en la inmensa mayoría de esos métodos, de consistencia lineal, el *patch test* debería ser satisfecho exactamente. Así, si un método con aproximación lineal no verifica el *patch test* se deduce que la causa debe ser la integración numérica.

En trabajos previos sobre el *MEN*, como SUKUMAR ET AL. [1998] ó CUETO ET AL. [2002], se muestran aproximaciones en dos y tres dimensiones que no pasan el test con precisión de máquina. En este apartado, tal y como indica su título, se analizan los resultados obtenidos por el método con la descomposición del soporte propuesto en (4.2), con algunos resultados numéricos.

Ejemplo 4.2.1. Se considera la nube de nueve nodos de la figura 4.4.

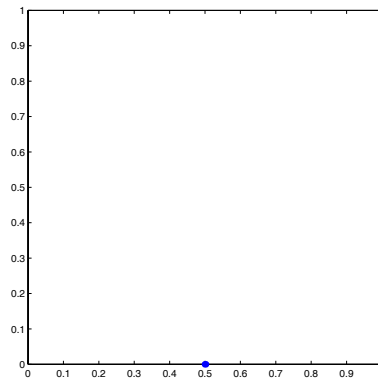


Figura 4.4: Nube de nueve nodos para la aplicación del método de descomposición del soporte para el *patch test*.

Se muestran los resultados obtenidos con esta nube (mediante el uso de la norma L_2 del error) en la tabla 4.1. El número de puntos empleados en la cuadratura sobre cada triángulo y cada segmento circular se muestran en las dos primeras columnas de la tabla.

N.P.C. en Triángulos	N.P.C. en “Segmentos”	$\ e\ _{L_2}$
2×2 Gauss	2×2 Gauss	$2,1527 \cdot 10^{-2}$
4×4 Gauss	4×4 Gauss	$2,2793 \cdot 10^{-3}$
10×10 Gauss	10×10 Gauss	$4,1850 \cdot 10^{-4}$
20×20 Gauss	20×20 Gauss	$1,3944 \cdot 10^{-5}$
50×50 Gauss	50×50 Gauss	$6,1493 \cdot 10^{-6}$
70×70 Gauss	70×70 Gauss	$2,2505 \cdot 10^{-6}$
100×100 Gauss	100×100 Gauss	$5,6665 \cdot 10^{-7}$
150×150 Gauss	150×150 Gauss	$4,2297 \cdot 10^{-7}$

Tabla 4.1: Resultados para el *patch test* sobre nueve nodos distribuidos sobre el cuadrado unidad. Método de descomposición del soporte. (*N.P.C.* son las siglas de Número de Puntos de Cuadratura)

Se puede observar que, aún con un alto número de puntos de cuadratura, los resultados están lejos de la precisión de la máquina (10^{-16}). Este comportamiento es similar al observado en el método de las esferas finitas (DE Y BATHE [2001c]) o en el método *MLPG* (ATLURI ET AL. [1999]), donde es necesario un alto número de puntos de cuadratura para lograr altos niveles de precisión. Así, se puede concluir que el error debido al carácter no polinomial de la función de forma tiene una importancia notable en el funcionamiento del esquema de cuadratura.

Esta es la razón que nos lleva a considerar el uso de un método de integración nodal estabilizada conforme (CHEN ET AL. [2001a]).

4.2.2. Conclusiones para la aproximación basada en la descomposición del soporte

Esta clase de técnicas basadas en la descomposición del soporte usualmente necesitan un gran número de puntos de cuadratura para obtener resultados razonables. Esto es debido al factor de haber ignorado el carácter racional de las funciones de forma. DE Y BATHE [2001c] usaron originalmente hasta 144 puntos de cuadratura por nodo, mientras en su versión mejorada del método (DE Y BATHE [2001b]), usan 49 puntos. Valores similares, tanto en precisión como en puntos de cuadratura, fueron obtenidos y usados por ATLURI ET AL. [1999] y ATLURI Y ZHU [2000].

4.3 Integración nodal estabilizada en métodos de Galerkin de vecindad natural

Teniendo en cuenta el carácter racional de las funciones de forma del *MEN*, se ha considerado el uso de otra clase de técnicas de integración numérica. Los métodos de cuadratura nodales no usan una malla de fondo para integrar, definiendo una aproximación de las integrales de la forma:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega \approx \sum_{i=1}^{nn} f(x_i)\omega_i \quad (4.3.1)$$

donde x_i representa las coordenadas nodales y ω_i los pesos asociados a los nodos. Finalmente, nn representa el número de nodos usados en la aproximación. Estas técnicas han dado usualmente resultados pobres al aplicarlas a los métodos sin malla basados en el método de Galerkin, en parte debido al factor que las derivadas de las

funciones de forma son nulas en el nodo en muchos de los métodos sin malla o no están definidas, como ocurre en el *MEN*.

Para resolver esto, se ha seguido una aproximación similar a la presentada en CHEN ET AL. [2001a].

4.3.1. Requerimientos a la integración

La convergencia del método de Galerkin para una ecuación en derivadas parciales está determinada por la aproximación de las incógnitas y por la integración numérica de la forma débil del problema. El empleo de funciones de forma con consistencia lineal en la aproximación de Galerkin no garantiza una exactitud lineal en la solución del método de Galerkin. CHEN ET AL. [2001a] proponen un requerimiento adicional asociado al dominio de integración para métodos sin malla de Galerkin.

Cosidérese el problema de la elasticidad lineal, (3.2.1), con las condiciones de contorno (3.2.3) y en ausencia de fuerzas volumétricas. Y considérese la consecuente forma débil del problema (3.2.5).

En equilibrio estático, si las condiciones de contorno esenciales están definidas como una función lineal $g_i(x, y) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}y$, y las condiciones de contorno naturales están asignadas de la forma $h_i = \sigma_{ij}n_j$ con la tensión σ_{ij} calculada a partir de $u_i(x, y) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}y$, entonces la solución del problema es la misma función lineal: $u_i(x, y) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}y$.

Para lograr en una aproximación de Galerkin una exactitud lineal, la aproximación del campo de desplazamientos $u_i^h = \sum_{l=i}^{NP} \Psi_l d_{il}$ en la ecuación variacional debe generar una solución lineal discreta (con las condiciones de contorno mencionadas anteriormente). Esto es equivalente a exigir que una solución lineal discreta $u_i^h = \sum_{l=i}^{NP} \Psi_l d_{il}$ cumpla exactamente la ecuación discreta asociada con la ecuación (3.2.5), cuando están prescritas las condiciones de contorno esenciales y naturales basadas en un campo de desplazamientos lineal, o lo que es lo mismo, exigir que las funciones de forma tengan consistencia lineal en la ecuación

$$\sum_{l=1}^{NP} \psi_l(\mathbf{x}) x_{1l}^p x_{2l}^q = x_1^p x_2^q, \quad \text{para } p + q = 0, \dots, n.$$

Proposición 4.3.1. *Dada una formulación variacional cualquiera, si cumple*

- que

$$\sum_{L=1}^{NIT} \mathbf{B}_I(x_L)\omega_L = 0, \text{ para todos los nodos interiores } \{I : \text{sop}(\Psi_I) \cap \Gamma = \emptyset\} \quad (4.3.2)$$

donde NIT es el número de puntos de integración y \mathbf{B}_I representa la matriz de gradientes estándar. Si se emplean métodos de integración nodal, x_L es la localización espacial de los nodos, y ω_L son los pesos asociados a cada nodo que varía con el tipo de métodos de integración empleados.

- Que en aquellos nodos que cumplan que sus funciones de forma intersectan con la frontera natural del dominio, para algún $\boldsymbol{\sigma}^C$ (vector de tensión constante), se cumple que

$$\sum_{L=1}^{NIT} \mathbf{B}_I(x_L)\omega_L = \sum_{L=1}^{NITh} N_I(x_L)s_L, \quad (4.3.3)$$

para todos los nodos de la frontera

$$\{I : \text{sop}(\Psi_I) \cap \Gamma^h \neq \emptyset\},$$

donde s_L son los pesos de la frontera de integración, $NITh$ es el número de puntos de integración sobre la frontera natural, y donde se tiene que

$$\mathbf{N}_I = \begin{pmatrix} \Psi_I \mathbf{n}_1 & 0 \\ 0 & \Psi_I \mathbf{n}_2 \\ \Psi_I \mathbf{n}_2 & \Psi_I \mathbf{n}_1 \end{pmatrix}$$

entonces la integración del campo de desplazamientos lineal es exacta.

Demostración. Puede consultarse en CHEN ET AL. [2001a] □

Esta condición recibe el nombre de “Integration Constraint” (*IC*).

4.3.2. Campo de deformaciones suavizado

Definición 4.3.1. Se define un nuevo campo de deformaciones en cada nodo, $\tilde{\varepsilon}$, como

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^h(\mathbf{x}_I) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{x} - \mathbf{x}_I)d\Omega \quad (4.3.4)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa el tensor de deformaciones de Cauchy y Φ es una función de distribución.

Se toma como función de distribución

$$\Phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I) = \begin{cases} \frac{1}{A_I}, & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega_I \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.3.5)$$

siendo Ω_I la celda de Voronoi asociada al nodo I , véase por ejemplo la figura 4.5 (otras aproximaciones en la definición el área asociada a cada nodo se analizan en CHEN ET AL. [2001b], pero esta es particularmente apropiada para el *MEN*) y A_I la correspondiente área de la celda.

La nueva deformación suavizada quedaría como

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^h(\boldsymbol{x}_I) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) \Phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I) d\Omega \quad (4.3.6)$$

Aplicando el teorema de la divergencia a dicha expresión, se obtiene inmediatamente

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^h = \frac{1}{2A_I} \int_{\Gamma_I} (u_i^h \boldsymbol{n}_j + u_j^h \boldsymbol{n}_i) d\Gamma \quad (4.3.7)$$

siendo Γ_I el contorno de la celda de Voronoi asociada al nodo I .

Nota 4.3.1. La forma matricial de la expresión anterior se puede obtener introduciendo las funciones de forma de elementos naturales en la ecuación (4.3.7), obteniéndose:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^h(\boldsymbol{x}_I) = \sum_{J \in NN(I)} \tilde{\mathbf{B}}_J(\boldsymbol{x}_I) \mathbf{u}_I \quad (4.3.8)$$

donde $NN(I)$ representa el conjunto de nodos vecinos del punto \boldsymbol{x}_I .

Ejemplo 4.3.1. En dos dimensiones,

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{hT} = [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{11}^h, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{22}^h, 2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{12}^h] \quad \mathbf{u}_I^T = [u_{1I}, u_{2I}] \quad (4.3.9)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_I(\boldsymbol{x}_L) = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{I1}(\boldsymbol{x}_L) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{I2}(\boldsymbol{x}_L) \\ \tilde{b}_{I2}(\boldsymbol{x}_L) & \tilde{b}_{I1}(\boldsymbol{x}_L) \end{pmatrix} \quad (4.3.10)$$

$$\tilde{b}_{Ii}(\boldsymbol{x}_L) = \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \Psi_I(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{x}) d\Gamma \quad (4.3.11)$$

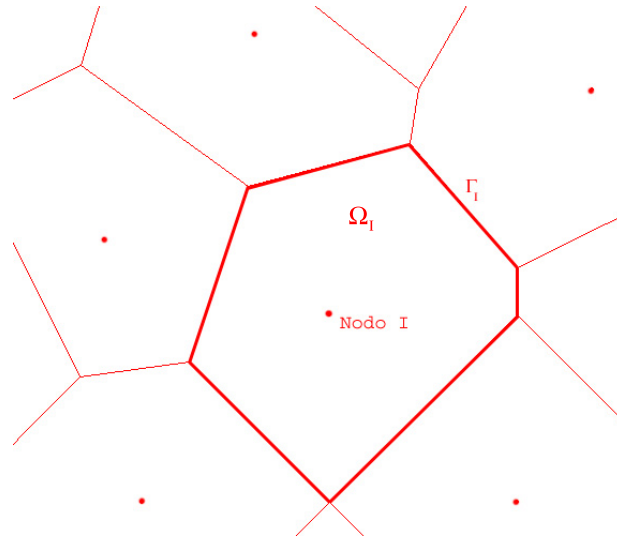


Figura 4.5: Ejemplo del diagrama de Voronoi en dos dimensiones.

Para asegurar la precisión y la convergencia empleando esta deformación suavizada como una estabilización dentro del método de Galerkin con integración nodal, debe de satisfacerse la condición de restricción de integración comentada anteriormente (*IC*). Para introducir la condición *IC* usando integración nodal estabilizada con la matriz de gradientes suavizada $\tilde{\mathbf{B}}_I$, debe de cumplirse la siguiente ecuación para todos los nodos de $\{I : \text{sup}(\Psi_I) \cap \Gamma = \emptyset\}$:

$$\sum_L \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{x}_L)A_L = \begin{pmatrix} \sum_L \tilde{b}_{I1}(\mathbf{x}_L)A_L & 0 \\ 0 & \sum_L \tilde{b}_{I2}(\mathbf{x}_L)A_L \\ \sum_L \tilde{b}_{I2}(\mathbf{x}_L)A_L & \sum_L \tilde{b}_{I1}(\mathbf{x}_L)A_L \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.3.12)$$

y consecuentemente, cada componente de la matriz (4.3.12) debe anularse, es decir,

$$\sum_L \tilde{b}_{Ii}(\mathbf{x}_L)A_L = 0 \quad (4.3.13)$$

donde

$$\sum_L \tilde{b}_{Ii}(\mathbf{x}_L)A_L = \sum_L \int_{\Gamma_L} \Psi_I(\mathbf{x})\mathbf{n}_i(\mathbf{x})d\Gamma \quad (4.3.14)$$

Cada segmento de Γ_L que se encuentre en el interior del soporte Ψ_I está dividido en dos dominios nodales con superficies normales opuestas sobre cada lado del dominio, como se muestra en la figura 4.6. La condición $n^+(\mathbf{x}) = -n^-(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \Gamma_L$, $\mathbf{x} \in \text{sup}(\Psi_L)$ hace que desaparezca el sumatorio $\sum_L \int_{\Gamma_L} \Psi_I(\mathbf{x})\mathbf{n}_i(\mathbf{x})d\Gamma$ en

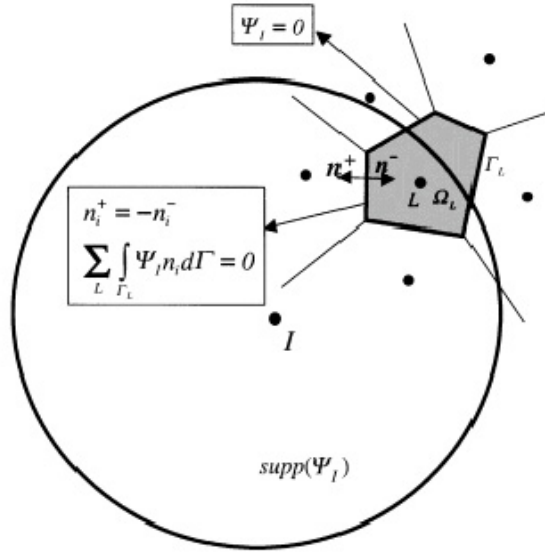


Figura 4.6: Relación geométrica entre el $\text{supp}(\Psi_I)$ y el dominio nodal Ω_L (CHEN ET AL. [2001a]).

la ecuación (4.3.14). Para Γ_L completa o parcialmente fuera del soporte $\text{supp}(\Psi_I)$, $\Psi_I(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x} \in \Gamma_L$, $\mathbf{x} \notin \text{supp}(\Psi_I)$, y entonces sobra la condición de

$$\sum_L \int_{\Gamma_L} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) d\Gamma = 0.$$

Por lo tanto, para nodos interiores, la matriz $\tilde{\mathbf{B}}_I$ satisface exactamente la condición de restricción de integración (4.3.2), es decir,

$$\sum_L \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{x}_L) A_L = 0 \quad (4.3.15)$$

En el caso en el cual el soporte $\text{supp}(\Psi_I)$ intersekte con la frontera natural, la ecuación (4.3.14) se reduce a

$$\sum_L \tilde{b}_{Ii}(\mathbf{x}_L) A_L = \sum_L \int_{\Gamma_L \cap \Gamma^h} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma^h} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.3.16)$$

En el resultado de la ecuación anterior (4.3.16), han sido utilizadas dos condiciones:

$$(1) \sum_L \int_{\Gamma_L \setminus \Gamma^h} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) d\Gamma = 0$$

(2) $\Psi_I(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x} \in \Gamma^h$, $\mathbf{x} \notin \text{sop}(\Psi_I)$.

De hecho, la ecuación (4.3.16) se aplica a todos los nodos que intersecten con el contorno. La integración numérica sobre el contorno en la ecuación (4.3.16), debe satisfacer la condición *IC* de la ecuación (4.3.3) anterior.

4.3.3. Aproximación y Discretización

La aproximación de la forma débil del problema (ecuación (3.2.5)) define una matriz de rigidez y un vector de fuerzas volumétricas, en ausencia de fuerzas volumétricas, (ecuación (3.2.8)) que puede expresarse como:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \sum_{m=1}^{NP} \tilde{\mathbf{B}}_I^T(\mathbf{x}_m) \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}}_J(\mathbf{x}_m) V_m^n \quad (4.3.17)$$

$$\mathbf{f}_I = \sum_{m=1}^{Nnb} \Psi(\mathbf{x}_m) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_m) V_m^{n-1} \quad (4.3.18)$$

siendo V_m^n el volumen de dimensión n de la celda de Voronoi asociado al nodo m . Este volumen se calcula a partir de la ecuación (3.4.12). Nnb representa el número de nodos de la frontera natural.

Este esquema de cuadratura nodal ha dado excelentes resultados al aplicarlo al *EFGM* (CHEN ET AL. [2001a], CHEN ET AL. [2001b]), y especialmente en su aplicación al *MEN*, ya que muchas de las entidades geométricas que aparecen en el cálculo (celdas de Voronoi, circuncentros, etc.) están de hecho previamente obtenidas en el cálculo de las funciones de forma de elementos naturales y pueden ser fácilmente almacenadas con un importante ahorro computacional. Esto permite también una verdadera implementación nodal del método de los Elementos Naturales, lo cual significa que las variables secundarias se pueden obtener sin necesidad de realizar proyecciones, como en la versión tradicional del método de los Elementos Finitos o en versiones previas no lineales del *MEN*, como por ejemplo GARCIA-AZNAR ET AL. [2000].

En la siguiente sección 4.4 se muestran los resultados obtenidos mediante el uso de la integración nodal estabilizada en su aplicación a varios problemas de la Elastostática.

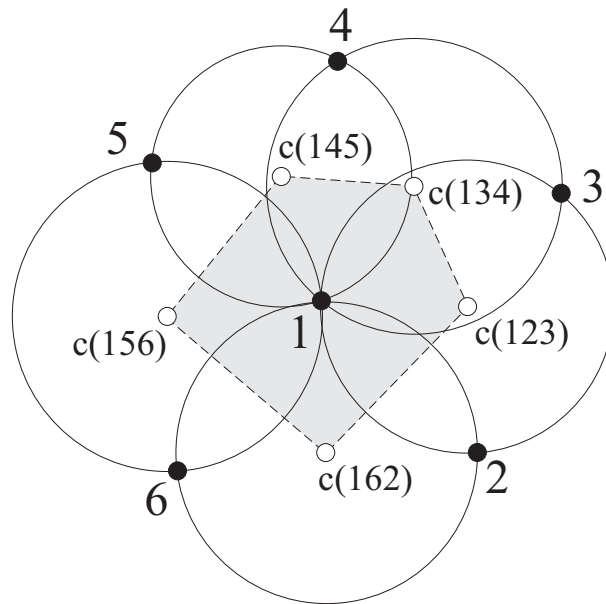


Figura 4.7: Definición de la celda de Voronoi del nodo 1 a través del uso de circuncentros de los triángulos que contienen al nodo.

4.3.4. Cuestiones algorítmicas

Una de las principales ventajas del uso de un método de integración nodal estabilizada, aparte de su precisión, es su fácil implementación favorecida por el hecho de que muchos de los datos son previamente calculados a través del algoritmo de LASSERRE [1983] (véase sección 3.4). Nótese que el cálculo de los diferentes términos implicados en las expresiones (4.3.17) y (4.3.18) se lleva a cabo en el contorno de las celdas de Voronoi asociadas al nodo.

Nota 4.3.2. El contorno de una celda de Voronoi de dos dimensiones, (véase figura 4.5), está compuesto por una colección de segmentos que comienzan y acaban en circuncentros consecutivos de los triángulos de los que el nodo considerado forma parte. En la figura 4.7 se muestra el cálculo de las inecuaciones que definen la celda de Voronoi asociada al nodo 1. Los nodos están representados en círculos llenos y los circuncírculos en círculos blancos. Dos circuncentros consecutivos y el propio nodo definen la inecuación que puede ser usada para calcular el área de la celda de Voronoi a través del algoritmo de Lasserre.

En los ejemplos en dos dimensiones presentados en la sección 4.4, en la integración numérica a lo largo de los segmentos de la celda de Voronoi se ha usado un solo punto por segmento interior y dos puntos de Gauss por segmento de contorno.

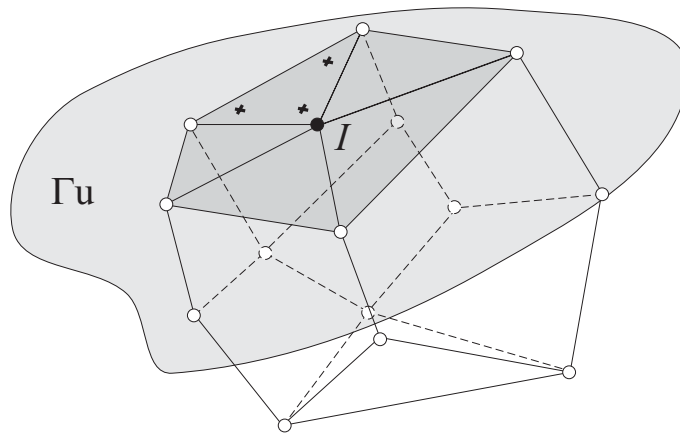


Figura 4.8: Integración numérica sobre la intersección de la celda de Voronoi del nodo I y el contorno el dominio. La intersección se ha descompuesto en triángulos y se ha empleado una cuadratura de tres puntos. De nuevo, los circuncentros se representan con círculos en blanco. Todos los otros nodos salvo el nodo I se omiten por claridad.

El uso de un solo punto por segmento interior es debido a la facilidad del cálculo del peso, puesto que este peso (ecuación (4.3.1)) es la longitud del segmento de la celda de contorno. Sin embargo, se ha observado que un punto no proporciona suficiente precisión en los segmentos de contorno, probablemente porque en este caso el nodo está situado en la frontera de la celda. El uso de dos puntos de Gauss por segmento de contorno ha dado excelentes resultados, como se demuestra en el siguiente apartado.

En los cálculos en tres dimensiones el algoritmo es esencialmente el mismo. En este caso el contorno de las celdas de Voronoi está compuesto por un número de polígonos convexos cuyas áreas deben de calcularse. Esto es cierto salvo para las celdas del contorno, que están cortadas por la frontera del dominio y pudieran ser no convexas. Como en el caso de problemas en dos dimensiones, el área de dichas celdas coincide con el peso de la cuadratura si usamos un sólo punto de Gauss por contorno de la celda. En esos casos el contorno de las celdas de Voronoi —tanto si intersectan con el dominio, como si son interiores— han sido descompuestas en triángulos y se han usado cuadraturas de uno y tres puntos de Hammer (véase figura 4.8). La figura 4.9 muestra, como un ejemplo, la división del cilindro analizado en la sección 4.4.4 en celdas de Voronoi. Nótese que esas celdas se cortan con el contorno de regiones no convexas cortan a su propio contorno (figura 4.10). En estos casos la faceta triangular del contorno se usa para cortar la celda.

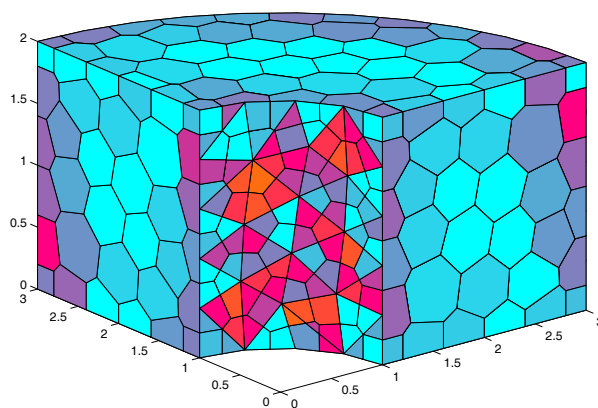


Figura 4.9: División de un cilindro hueco de la sección 4.4.4 en celdas de Voronoi. Se muestran también las facetas triangulares que definen la región no convexa del dominio.

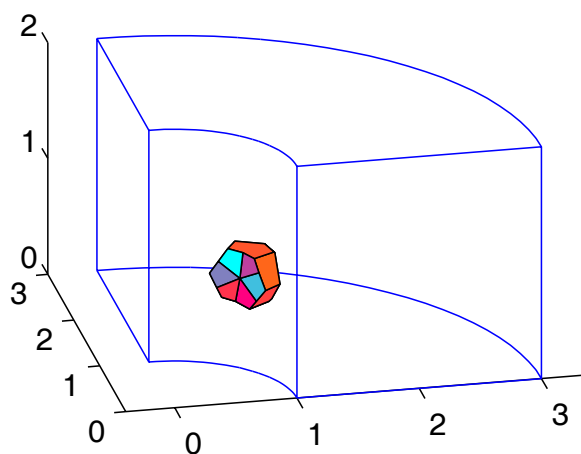


Figura 4.10: Ejemplo de una celda de Voronoi cortada por el contorno.

4.4 Resultados numéricos

4.4.1. *Patch tests* 2D con integración nodal estabilizada

La técnica presentada en el apartado 4.3 ha sido aplicada a diferentes *patch tests* sobre diversas nubes de puntos. Éstos se representan en la figura 4.11. Se han considerado distribuciones de los nodos tanto regulares como distribuciones irregulares.

Nota 4.4.1. Usualmente, se consideran dos clases de *patch test*, llamados *patch test* de desplazamiento, ya definido en (4.2.1), y de equilibrio. En este último caso, se impone un campo constante de tensiones de valor unidad, de forma que el campo de desplazamientos teórico debe ser

$$u_1 = \frac{\nu}{E}(1 - x_1) \quad (4.4.1)$$

$$u_2 = \frac{x_2}{E} \quad (4.4.2)$$

En todos los casos, se ha empleado un punto de cuadratura en la integración a lo largo de cada segmento que define la celda de Voronoi de los nodos interiores. Para los nodos del contorno del dominio o los nodos cuyas celdas cortan el contorno, fue empleada una cuadratura de Gauss de dos puntos. Nótese que la derivada de la función de forma de los vecinos naturales no está definida en los nodos, así que se ha decidido evitar que los puntos de integración coincidan con los nodos. Los resultados obtenidos (en norma del error L_2 , como consta en la ecuación 4.4.3) están recogidos en la tabla 4.4.1.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) d\Omega \right)^{1/2} \quad (4.4.3)$$

Puede observarse cómo esos resultados mejoran los obtenidos por el método de la descomposición del soporte. Están muy cercanos a la precisión de la máquina, tanto en el *patch test* de desplazamientos como el de equilibrio. La integración sobre los triángulos de Delaunay (véase SUKUMAR ET AL. [1998]) también ofrece peores resultados, acotados por 10^{-5} para nubes similares a las consideradas en este trabajo. Así queda claro que el uso de una cuadratura nodal estabilizada conforme parece ser una opción atractiva para la integración numérica en los métodos de elementos naturales.

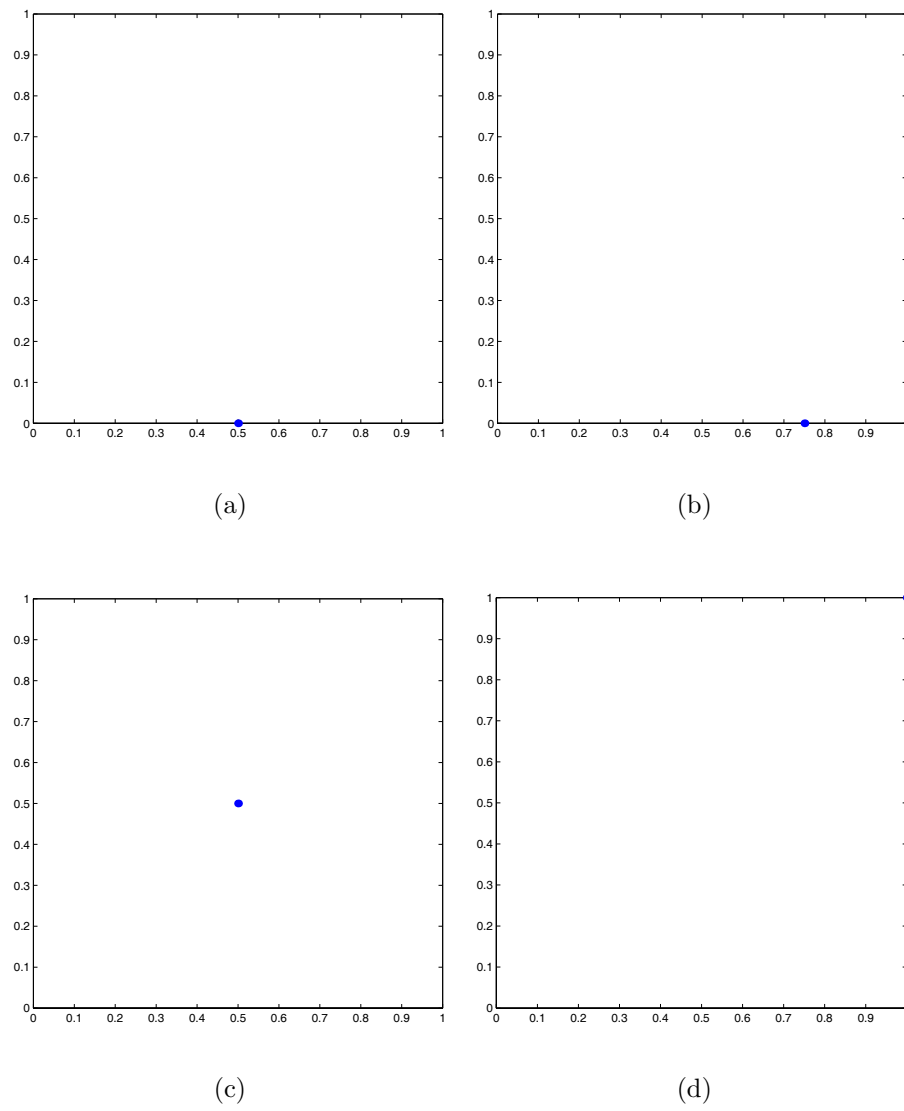


Figura 4.11: Nubes de puntos considerados en la aplicación del *patch test* con integración nodal estabilizada.

Nube de puntos	CAMPO IMPUESTO	$\ e\ _{L_2}$
(a)	DESPL. BILINEAL	$2,7208 \cdot 10^{-16}$
(a)	DESPL. LINEAL	$2,4343 \cdot 10^{-16}$
(b)	DESPL. BILINEAL	$4,2407 \cdot 10^{-16}$
(c)	DESPL. BILINEAL	$2,9842 \cdot 10^{-16}$
(a)	TENSIÓN CONSTANTE	$7,8614 \cdot 10^{-16}$
(d)	TENSIÓN CONSTANTE	$9,2009 \cdot 10^{-16}$

Tabla 4.2: Resultados para el *patch test* sobre la nube de puntos descrita en la figura 4.11.

4.4.2. Problema de placa con agujero

En esta sección se considera la aplicación de cuadraturas nodales estabilizadas al conocido problema de una placa infinita con agujero bajo una tensión uniaxial constante aplicada en el infinito.

Considerado el problema de dicha placa, la solución teórica de este problema es:

$$u_1(r, \theta) = \frac{a}{8\mu} \left[\frac{r}{a}(\kappa + 1) \cos \theta + 2\frac{a}{r}((1 + \kappa) \cos \theta + \cos 3\theta) - 2\frac{a^3}{r^3} \cos 3\theta \right] \quad (4.4.4)$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{a}{8\mu} \left[\frac{r}{a}(\kappa - 3) \sin \theta + 2\frac{a}{r}((1 - \kappa) \sin \theta + \sin 3\theta) - 2\frac{a^3}{r^3} \sin 3\theta \right] \quad (4.4.5)$$

donde μ representa el módulo de cortante y κ la constante de Kolosov, definida como

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (4.4.6)$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (4.4.7)$$

respectivamente, para los casos de deformación y tensión plana.

La solución teórica de este problema se encuentra en TIMOSHENKO Y GOODIER [1972], entre otras referencias clásicas.

Aplicando condiciones de simetría, se ha modelado solamente un cuarto de la placa, y se han aplicado en el contorno del modelo las tensiones exactas que derivan de (4.4.4) y de (4.4.5). La geometría del modelo se muestra en la figura 4.12. En este caso, se ha empleado un punto de cuadratura sobre cada segmento de las celdas de Voronoi interiores. En los segmentos exteriores de las celdas de Voronoi se han aplicado dos puntos de cuadratura de Gauss. Los parámetros del material son el

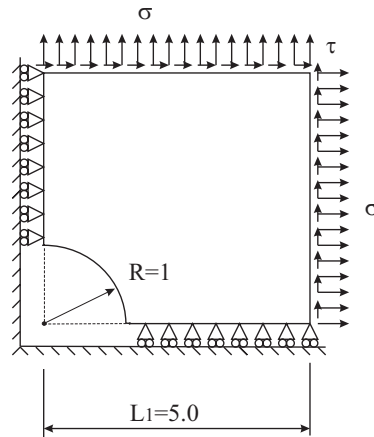


Figura 4.12: Geometría del problema de una placa infinita con agujero sometida a tracción.

módulo de Young $E = 1,0$ y el coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$.

Nº de nodos	$\ e\ _{L_2}$ Int. sobre triang. de Delaunay	$\ e\ _{L_2}$ Int. nodal
434	$5,9402 \cdot 10^{-3}$	$5,9393 \cdot 10^{-3}$
963	$1,2318 \cdot 10^{-3}$	$1,5864 \cdot 10^{-3}$
2862	$4,5462 \cdot 10^{-4}$	$5,2154 \cdot 10^{-4}$

Tabla 4.3: Resultados para el problema de placa con agujero.

Los errores de aproximación pueden ser más grandes que los errores de integración. Este comportamiento se puede observar para algunos ejemplos en el trabajo de CHEN ET AL. [2001a]. Por supuesto, este error se puede disminuir incrementando el orden de cuadratura en cada polígono de la celda de Voronoi y especialmente incrementando el número de nodos, es decir, aumentando la precisión de la aproximación empleada, como se discute en 4.4.4.

En el apartado siguiente se proporciona una explicación para este comportamiento, aparentemente incoherente con lo visto hasta ahora.

4.4.3. Patch test tridimensional

En esta sección se examinan los resultados referentes a la aplicación de la integración nodal estabilizada conforme al *patch test* de tres dimensiones. En CUETO ET AL. [2002] se ha demostrado que el comportamiento del *MEN* tridimensional en lo relativo a la integración numérica sobre tetraedros es esencialmente el mismo

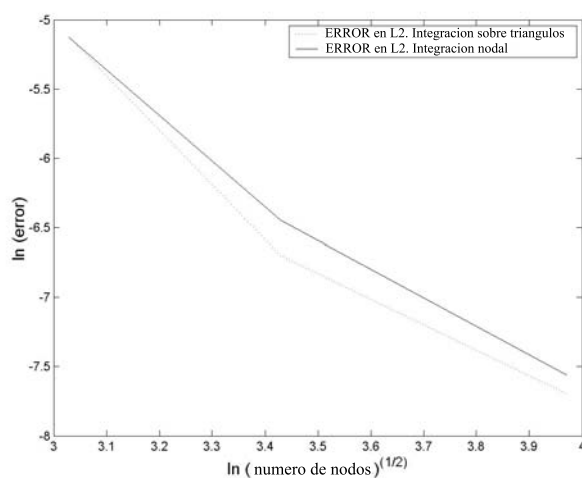


Figura 4.13: Norma del error L_2 en el problema de placa con agujero.

que en dos dimensiones. Se observa cómo los *patch tests* no se verifican con precisión de máquina, ni siquiera si los interpolantes de los vecinos naturales reproducen exactamente el campo impuesto de desplazamientos o de tracciones.

Ejemplo 4.4.1. Para la aplicación de los ejemplos del *patch test* tridimensional se han considerado diversas nubes de puntos, todas distribuidas sobre el cubo unidad. Las distintas nubes empleadas se muestran de la figura 4.14 a la figura 4.16. En estos ejemplos se ha impuesto un campo lineal de desplazamientos sobre el contorno.

La integración se ha llevado a cabo sobre caras de las celdas de Voronoi usando en cada una de ellas un punto de cuadratura, o bien dividiendo las caras —siempre un poliedro convexo, véase por ejemplo la figura 4.17, donde se representan las celdas de Voronoi para una nube de nueve puntos— en triángulos y usando tres puntos de Hammer para la integración de las mismas. En las celdas con intersección no vacía con el contorno se ha empleado esta última aproximación, mientras que en las caras interiores se ha observado que un sólo punto de cuadratura proporciona suficiente precisión. Esto simplifica los cálculos notablemente. La necesidad de dividir las caras del contorno se atribuye al factor de que las funciones de forma no son derivables en los nodos, que en estos casos están en las propias caras del contorno.

Se han comparado los resultados calculados mediante esta técnica con los obtenidos en el trabajo mencionado previamente de CUETO ET AL. [2002], donde se empleaba integración sobre los tetraedros. Los resultados se muestran en la tabla 4.4. La nube de ocho nodos con cuatro puntos de cuadratura sobre el tetraedro es

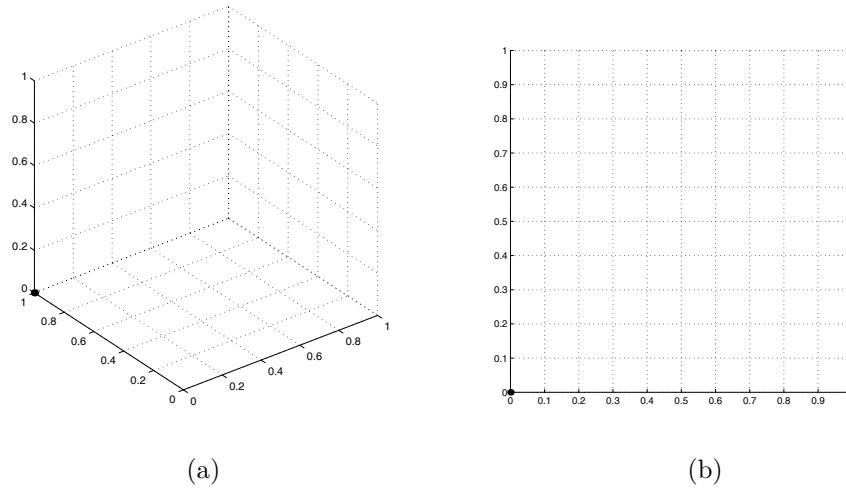


Figura 4.14: Nube de 8 puntos usada en la aplicación del *patch test*.

NUBE	Nº de ptos.	Distribución	Int. sobre tetraedros	Cuadr. nodal estabil.
Fig. 4.14	8	Regular	$1,7844E - 16$	$4,5678E - 16$
Fig. 4.15	9	Irregular	$1,0877E - 2$	$2,1298E - 16$
Fig. 4.16	27	Regular	$2,4660E - 3$	$1,5796E - 16$

Tabla 4.4: Norma del error L_2 en la aplicación del *patch test* tridimensional.

un caso especial de una tetraedrización simétrica en la cual los errores se compensan (SUKUMAR ET AL. [1998], CUETO ET AL. [2002]). Esta situación desaparece al considerar distribuciones de celdas de cuadratura no simétricas.

Nótese que el esquema de integración nodal estabilizada proporciona el nivel de precisión deseado (es decir, precisión de máquina) cuando la solución analítica del problema es reproducida exactamente por las funciones de base. Esto contrasta con los resultados obtenidos con el método de la descomposición del soporte de las secciones previas.

4.4.4. Cilindro hueco bajo presión

Para estudiar el comportamiento de la integración nodal estabilizada en problemas cuya solución no es reproducida por las funciones de base se ha usado el problema de un cilindro con agujero sometido a presión interna. Las dimensiones y la geometría del problema se muestran en la figura 4.18.

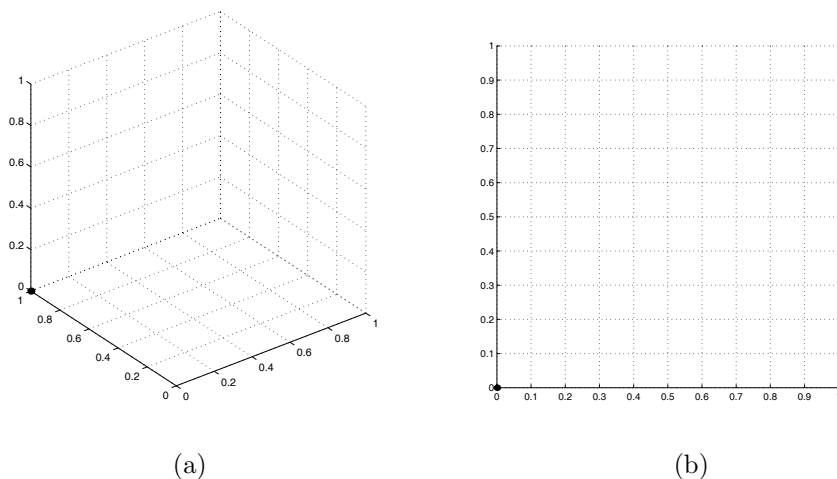
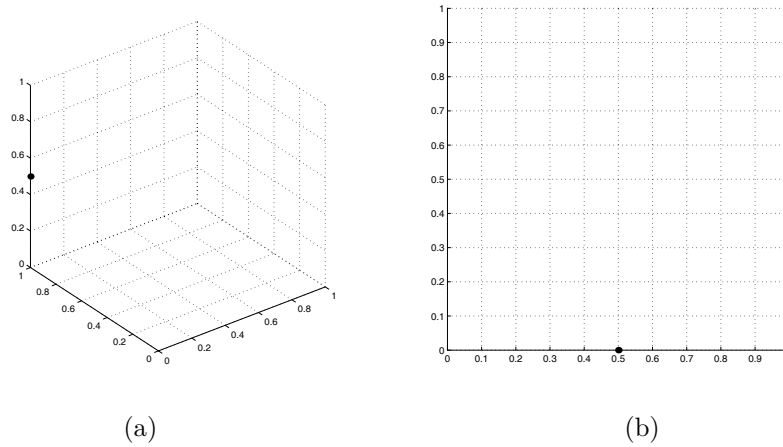


Figura 4.15: Nube de puntos usados en la aplicación del *patch test*. Distribución irregular de la nube de 9 puntos.

Considerado el problema anterior del cilindro con agujero sometido a presión interna cuya geometría y dimensiones se muestran en la figura 4.18, la solución analítica de este problema viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho &= \frac{R_i^2 p}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 - \frac{R_e^2}{\rho^2} \right) \\
 \sigma_\theta &= \frac{R_i^2 p}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 + \frac{R_e^2}{\rho^2} \right) \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta)
 \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\rho &= \frac{1}{E}(\sigma_\rho - \nu\sigma_\theta - \nu\sigma_z) \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_\rho - \nu\sigma_z) \\
 \varepsilon_z &= 0
 \end{aligned} \tag{4.4.9}$$


 Figura 4.16: Nube de 27 puntos usados en la aplicación del *patch test*.

$$\begin{aligned}
 u_\rho &= \frac{R_i^2 p \rho}{E(R_e^2 - R_i^2)} \left[1 - \nu + \frac{R_e^2}{\rho^2} (1 + \nu) \right] \\
 u_\theta &= 0 \\
 u_z &= 0
 \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

donde R_i y R_e representan, respectivamente, el radio interior y exterior del cilindro y p la presión aplicada.

La solución analítica de este problema se puede encontrar en varios libros clásicos de Elasticidad, tales como TIMOSHENKO Y GOODIER [1972].

El problema es de hecho bidimensional, reproduciendo un estado de deformación plana. En nuestro caso, se han fijado ambos extremos en la dirección axial para reproducir el estado de deformación plana. Debido a la simetría, solo se ha modelado un cuarto de cilindro, como se muestra en la figura 4.18.

Se han usado tres nubes de puntos que se muestran en la figura 4.19, con 166, 241 y 2076 nodos, respectivamente.

Las propiedades del material son $E = 1.0$ y $\nu = 0.25$. Los errores con respecto a la solución analítica se presentan en norma L_2 , como se ha definido en la ecuación (4.4.3) y están incluidos en la tabla 4.4.4. En la figura 4.21 se muestra la convergencia de los esquemas de integración aquí discutidos.

Nótese que en estos resultados se ha incluido el error asociado con la evaluación de la norma del error. De hecho, es difícil saber qué parte del error es debida a la

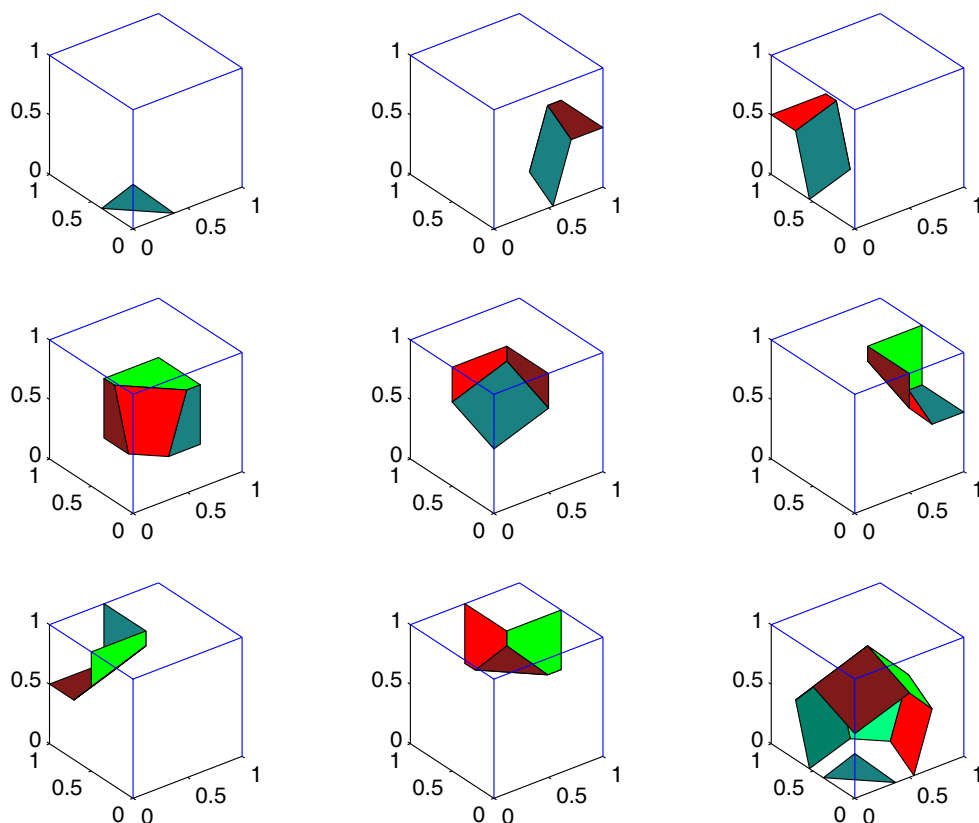


Figura 4.17: Celdas de Voronoi para la nube de 9 puntos. Para mayor claridad, se han omitido las caras de la celda pertenecientes al contorno.

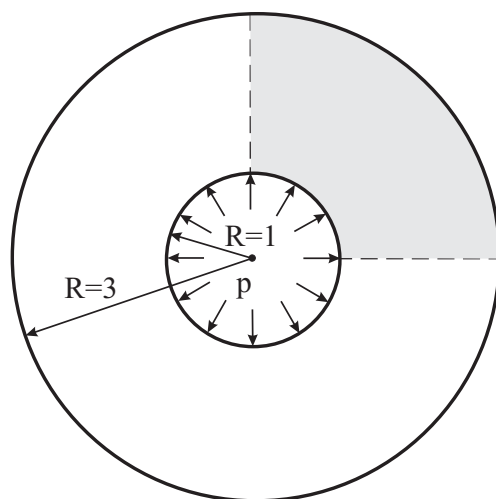


Figura 4.18: Geometría del problema de un cilindro hueco bajo presión.

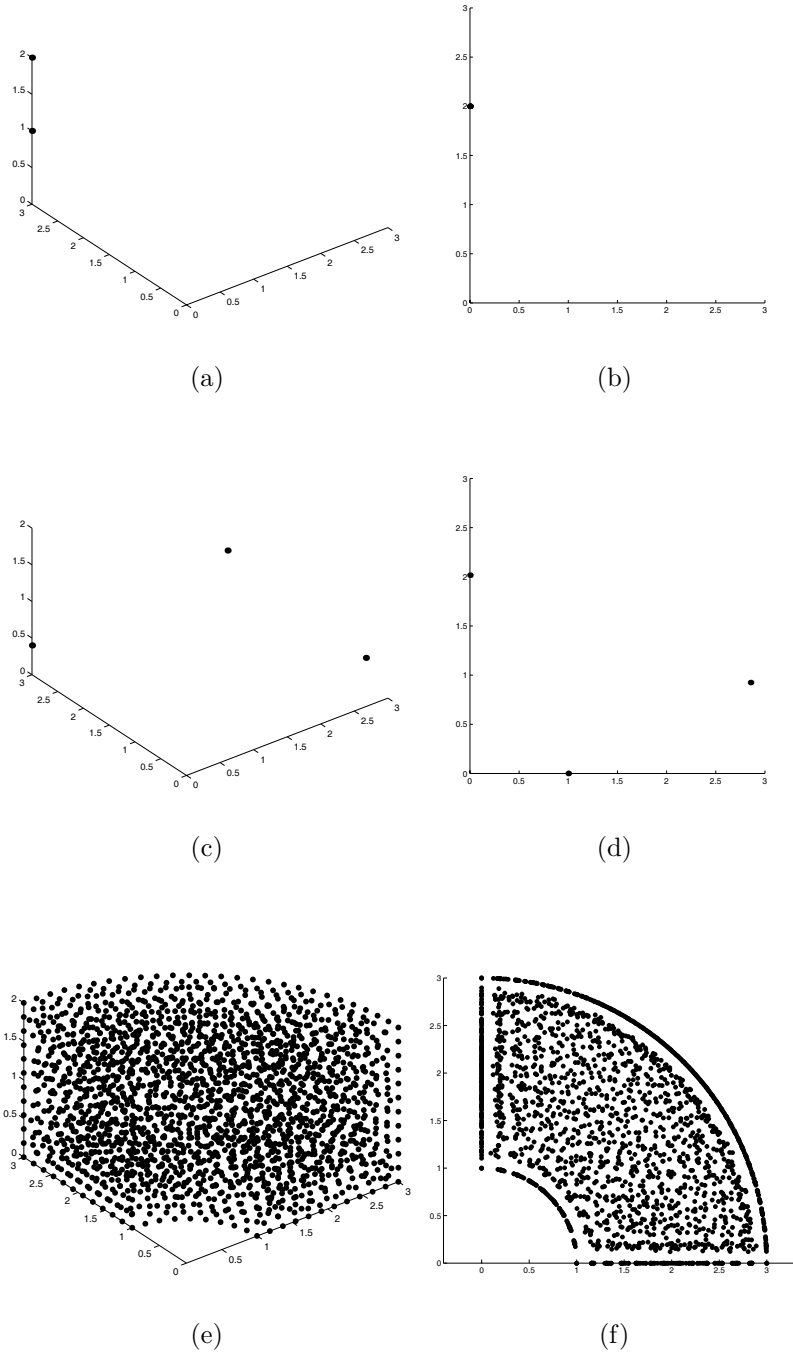


Figura 4.19: Nubes de puntos para el problema de un cilindro con agujero bajo presión.

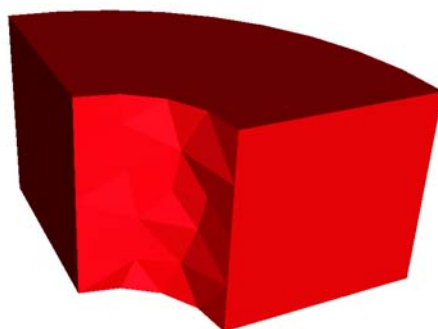


Figura 4.20: Forma α (166 nodos) usada en la solución del cilindro con agujero bajo presión.

Nº de Nodos	Integr. Nodal $\times 1$	Integr. Nodal $\times 3$	MEF	Int. sobre tetraedros
166	1.002E-02	8.240E-03	6.360E-03	4.740E-03
241	7.451E-03	6.080E-03	3.510E-03	2.880E-03
2076	3.501E-03	3.012E-03	9.568E-04	1.127E-03

Tabla 4.5: Norma del error L_2 para el problema del cilindro con agujero.

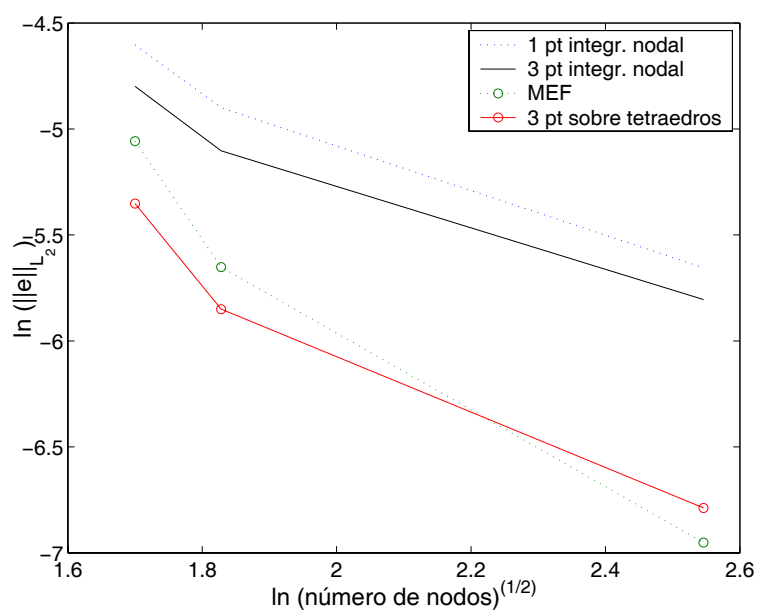


Figura 4.21: Convergencia del problema del cilindro con agujero.

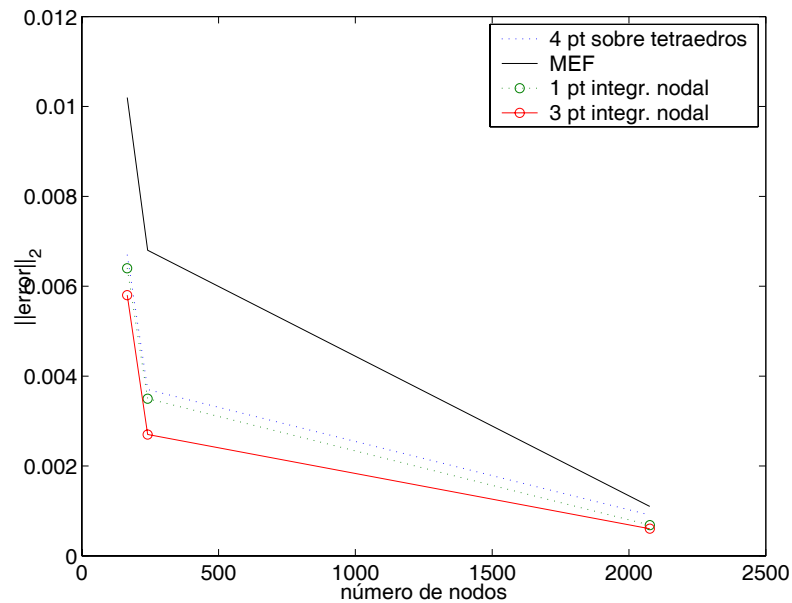


Figura 4.22: Convergencia del problema del cilindro con agujero en norma $\| \cdot \|_2$.

Nº de Nodos	Integr. sobre tetraedros	MEF	Integr. Nodal $\times 1$	Integr. Nodal $\times 3$
166	0.0067	0.0102	0.0064	0.0058
241	0.0037	0.0068	0.0035	0.0027
2076	0.000909	0.0011	0.000685	0.000603

Tabla 4.6: Norma del error $\| \cdot \|_{L_2}$ para el problema del cilindro con agujero.

aproximación y a la integración de la forma débil del problema y cuál es debida a la evaluación de la norma del error de integración. Para clarificar este aspecto, se han calculado normas discretas, por ejemplo la norma $\| \cdot \|_2$, definida como:

$$\|e\|_2 = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{I=1}^n e_I^2} \tag{4.4.11}$$

donde e_I representa el error nodal y n el número de nodos del modelo. Los resultados de esta norma se muestran en la figura 4.22 y la tabla 4.6.

En este caso es claro que, como se muestra, la integración nodal estabilizada con tres puntos presenta mejores resultados. Por otro lado, las cuadraturas de cuatro puntos de Hammer sobre tetraedros muestran los peores resultados, en claro contraste con los resultados de la norma L_2 . Como se ha mencionado previamente,

se demuestra que el error asociado con el propio cálculo de la norma del error que venía siendo ignorado debe ser tenido en cuenta. Esto explica también los resultados —a priori contradictorios— obtenidos en la sección 4.4.2, para el problema de la placa con agujero.

4.5 Conclusiones acerca de la integración numérica del *MEN*

Los métodos Galerkin de vecindad natural han demostrado tener un gran potencial tanto en mecánica de sólidos como de fluidos (véase, por ejemplo los resultados obtenidos por SUKUMAR ET AL. [1998], CUETO ET AL. [2000], CUETO ET AL. [2002], MARTÍNEZ ET AL. [2003]). Sin embargo, uno de sus inconvenientes, compartido con muchos de los métodos sin malla, es el error encontrado en la aplicación de cuadraturas numéricas. Esos errores son debidos a dos causas: el uso de las celdas de cuadratura que no son conformes con los soportes de las funciones de forma y a la integración de funciones no polinomiales con las tradicionales cuadraturas de Gauss. Además, varios métodos sin malla tienen aproximaciones con alto orden de derivabilidad, y sus variables secundarias se pueden obtener fácilmente derivando el campo esencial en los nodos. Las funciones de forma del *MEN* no son derivables en los nodos y se debe hacer una proyección de los puntos de cuadratura a los nodos si se ha empleado una cuadratura no nodal (véase por ejemplo, GARCIA-AZNAR ET AL. [2000]).

Es digno de mención que los resultados obtenidos con una aproximación basada en las particiones de los soportes de las funciones de forma no han dado los resultados deseados. Aún en el caso de que el campo de desplazamientos sea reproducido exactamente por las funciones de base, los resultados obtenidos están lejos de la precisión de máquina. Esto es indudable debido al carácter no polinomial de esas funciones de forma.

Por otro lado, se ha analizado una cuadratura nodal estabilizada propuesta en primer lugar por CHEN ET AL. [2001a] para el *EFGM* y se ha extendido a casos 3D. Se ha mostrado cómo esta aproximación es apropiada especialmente para los métodos Galerkin de vecindad natural, debido a las muchas entidades geométricas necesarias para su cálculo que son también necesarias para el cálculo de las funciones de forma. Esto proporciona un ahorro computacional notable.

Finalmente, se ha demostrado cómo el *patch test*, tanto en dos como en tres dimensiones, se verifica con precisión de máquina y también ha sido probada la

precisión del método sobre algunos problemas clásicos, mostrando excelentes resultados y convirtiéndose así realmente en un método nodal en el cual las variables secundarias se pueden obtener en los propios nodos sin derivar.

EL *MEN* EN LA SIMULACIÓN DE MEDIOS INCOMPRESIBLES

En los últimos años se han realizado numerosos estudios sobre simulación numérica de materiales que son casi-incompresibles o totalmente incompresibles. En las simulaciones numéricas de estos materiales, es bien conocido que la condición de anular la divergencia del campo de desplazamientos (incompresibilidad del medio) en la Mecánica de Sólidos (usualmente en Mecánica de Fluidos la incógnita del problema es el campo de velocidades), conduce a un sistema de ecuaciones sobre-restringido para ciertas aproximaciones (BATHE [1996]). Este fenómeno se conoce como *bloqueo volumétrico*. Una técnica de uso generalizado para superar dichas dificultades en este tipo de análisis se basa en el uso de aproximaciones mixtas de los campos de desplazamientos y de presiones. En este capítulo se presenta esta técnica de aproximación mixta aplicada al método de los elementos naturales, con los problemas y soluciones que aparecen al aplicar dicha técnica y algunos ejemplos numéricos que prueban su comportamiento.

5.1 Formulaciones no estándar y mixtas

En este apartado se van a tratar, en un nivel introductorio, las ideas básicas de los métodos de aproximaciones mixtas. En los años 60 fue introducido el término de método mixto para describir métodos de Elementos Finitos en los cuales eran

aproximados como variables primarias tanto los campos de desplazamientos como los de presiones.

5.1.1. Problema modelo

En los capítulos anteriores se ha desarrollado la formulación variacional del problema de la elasticidad. Para la introducción de la teoría necesaria en el desarrollo de este capítulo se empleará un problema modelo que se describe a continuación.

Se utilizará como problema de referencia el siguiente Problema de Valores en el Contorno (*P.V.C.*)

$$(P) = \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u|_{\Gamma} = u_0, & \text{en } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

En este nuevo problema,

- $\mathbf{p} = \nabla u$, es la nueva incógnita.
- $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in L^2(\Omega)$.
- $\nabla \cdot \mathbf{p} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = \Delta u \in L^2(\Omega)$.

El espacio de búsqueda para este problema será $H(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{p} \in L^2(\Omega) / \nabla \cdot \mathbf{p} \in L^2(\Omega)\}$.

5.1.2. Formulación no estándar

Si se multiplica la ecuación

$$\mathbf{p} = \nabla u,$$

por \mathbf{q} , tal que $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ (se va a exigir que $\nabla \cdot \mathbf{p} = -f$) y se aplica la fórmula de Green, se obtiene

$$\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{q} = - \int_{\Omega} u(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \int_{\Gamma} u|_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Gamma} u_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}.$$

Se llega a la siguiente formulación variacional

Definición 5.1.1. Se denomina *formulación variacional no estándar* a la definida

por el siguiente problema

$$\begin{cases} \mathbf{p} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \nabla \cdot \mathbf{p} = -f, \\ \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \int_{\Gamma} u_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}, \forall \mathbf{q} \in \{\mathbf{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega) / \nabla \cdot \mathbf{q} = 0\}. \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Nota 5.1.1. Es interesante hacer una pequeña comparación entre esta nueva formulación (5.1.2), y la formulación débil tradicional

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = u_0, \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \forall v \in \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma} = 0\}. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Obviamente ahora se añade el inconveniente de encontrar subespacios de aproximación de

$$\{\mathbf{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega) / \nabla \cdot \mathbf{q} = 0\}.$$

A continuación se introduce el concepto de *formulación mixta* manteniendo como variables del problema u y $\mathbf{p} = \nabla u$. Se define el siguiente problema

$$\begin{cases} \nabla u = \mathbf{p}, \text{ en } \Omega. \\ \nabla \cdot \mathbf{p} = -f, \text{ en } \Omega. \\ u|_{\Gamma} = u_0, \text{ en } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Multiplicando por $\mathbf{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ la primera ecuación de (5.1.2) y aplicando la fórmula de Green,

$$\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{q} = - \int_{\Omega} u(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \int_{\Gamma} u|_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Gamma} u_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{n},$$

luego

$$\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \int_{\Omega} u \nabla \cdot \mathbf{q} = \int_{\Gamma} u_0 (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}).$$

Para la segunda ecuación, se multiplica por $v \in L^2(\Omega)$ y se obtiene

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{p}) v = - \int_{\Omega} f v, \forall v \in L^2(\Omega).$$

Definición 5.1.2. Teniendo en cuenta todo lo anterior, se define la formulación

mixta del problema (5.1.1) como,

$$\begin{cases} \mathbf{p} \in H(\operatorname{div}, \Omega), u \in L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \int_{\Omega} u \nabla \cdot \mathbf{q} = \int_{\Gamma} u_0 \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}, \forall \mathbf{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{p}) v = - \int_{\Omega} f v, \forall v \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Llevando esta teoría a un contexto abstracto, se tendría

- Sean X, M , espacios de Hilbert.
- $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, una forma bilineal continua.
- $b : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua.
- $l : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $s : M \longrightarrow \mathbb{R}$, formas lineales y continuas.

Definición 5.1.3 (Problema mixto abstracto). Se define como problema mixto abstracto, al problema

$$\begin{cases} \mathbf{p} \in X, \mathbf{u} \in M \\ a(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + b(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = l(\mathbf{q}), \forall \mathbf{q} \in X \\ b(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = s(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in M. \end{cases}$$

Nota 5.1.2. Sea

$$X_0 = \{\mathbf{p} \in X / b(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in M\},$$

solución del problema homogéneo. Si se supone que existe \mathbf{p}_s tal que

$$b(\mathbf{p}_s, \mathbf{v}) = s(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in M.$$

Entonces $\mathbf{p}_s + X_0$ también cumple lo anterior. Tomando $\mathbf{q} \in X_0$ en la primera ecuación se llega a

$$\begin{cases} \mathbf{p} \in \mathbf{p}_s + X_0, \\ a(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = l(\mathbf{q}), \forall \mathbf{q} \in X_0. \end{cases}$$

que es el problema variacional clásico.

Es bien conocido (BATHE [1996]) que para poder obtener aproximaciones convergentes y estables para el problema 5.1.3 éstas deben cumplir una determinada condición. Esta condición se denomina condición *Ínfimo-Supremo*, también se conoce como condición *Inf-Sup*, o condición *LBB* (debido a sus autores, Ladyzenskaya, Babuška y Brezzi, véase BREZZI [1974], BABUŠKA [1973]).

5.1.3. Aproximación, estabilidad y convergencia.

Se ha ido viendo que todas las formulaciones variacionales estándar se pueden escribir en la forma

$$\text{Encontrar } \mathbf{u} \in V \text{ tal que } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V.$$

con V el espacio de funciones, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal, y $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ forma lineal.¹ Ya se ha comentado que para resolver este problema mediante un método de Galerkin se elige un subespacio de dimensión finita V_h de V , y se determina la solución aproximada \mathbf{u}_h mediante la misma formulación débil. Así, el problema quedaría:

$$\text{Encontrar } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ tal que } a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V_h.$$

Si la formulación débil proviene de un principio variacional, el problema débil discreto es equivalente a resolver el principio variacional buscando un punto crítico en el subespacio V_h .

El objetivo deberá ser el conseguir que se cumplan 3 propiedades fundamentales para tales discretizaciones (ARNOLD ET AL. [1984]),

Convergencia. Mide la diferencia entre la solución exacta del problema y la aproximada $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$. Una buena convergencia es el objetivo final de cualquier método numérico.

Aproximación. Mide el error en la mejor de las aproximaciones de la solución del problema obtenida mediante elementos de V_h , es decir, el menor error posible entre la solución exacta y cualquier elemento del espacio discretizado V_h . Obviamente, este error va a depender directamente del espacio elegido V_h , de la distancia elegida y de la solución exacta. Una buena aproximación no garantiza una buena convergencia, pero una mala aproximación ofrece con seguridad una mala convergencia.

Estabilidad. Está referida a la continuidad de la forma lineal l sobre la solución discreta \mathbf{u}_h .

¹Si el problema no es homogéneo, \mathbf{u} no representaría a la solución, pero ya se ha visto cómo habría que proceder, eligiendo un valor arbitrario pero fijo tal que la diferencia entre este valor y la solución satisfaga las condiciones esenciales de contorno.

Para cuantificar estas nociones, es necesario, tal como se ha indicado, introducir normas que proporcionen la distancia asociada en la que se miden la convergencia y la aproximación.

Sea $\|\mathbf{v}\|$ una norma sobre funciones $\mathbf{v} \in V$. Entonces,

$$\|\mathbf{v}\| > 0 \text{ si } \mathbf{v} \neq 0 \text{ y } \|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|.$$

Si se supone que la forma bilineal es acotada

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq k\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Habiendo establecido una norma sobre V , queda claro que se puede medir la convergencia y la aproximación mediante,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \quad \text{e} \quad \inf_{\mathbf{v} \in V} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \text{respectivamente.}$$

Para cuantificar la noción de estabilidad, es necesaria una norma en el espacio de funcionales sobre V .

Definición 5.1.4. Se define la *norma dual*, como

$$\|f\|_* = \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V} \frac{\|f\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (5.1.4)$$

para $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposición 5.1.1. *Teniendo en cuenta la definición anterior, la constante de estabilidad de un método de Galerkin (ARNOLD [1990]) viene dada por*

$$C_h = \sup_{f: V \rightarrow \mathbb{R}} \frac{\|\mathbf{u}_h\|}{\|f\|_*} \quad (5.1.5)$$

El mayor de estos valores, para cualquier posible f , es la constante de estabilidad (ARNOLD [1990]).

Si se piensa en el problema discreto como una ecuación matricial, la constante de estabilidad es justamente la norma de la matriz inversa.

Proposición 5.1.2. (ARNOLD [1990]) *Con la notación anterior, se tiene la si-*

guiente relación fundamental entre convergencia, aproximación y estabilidad:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq k C_h \inf_{\mathbf{v} \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \quad (5.1.6)$$

Si se escoge una norma razonable tal que la constante k no sea muy grande, la relación anterior establece que si la constante de estabilidad C_h no es grande, entonces el error en la solución Galerkin no será mucho mayor que el error de la mejor aproximación posible en V . Para una mayor claridad, considérese una sucesión de subespacios V_h parametrizados por un número positivo h tendiendo a cero (representando por ejemplo, el tamaño de la malla, de la nube de puntos, etc). Si se supone que los espacios tienen mayor precisión, es decir, son tales que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\mathbf{v} \in V} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 0,$$

entonces, si la constante de estabilidad C_h permanece acotada cuando $h \rightarrow 0$, se tiene que \mathbf{u}_h converge a la solución exacta \mathbf{u} , a la misma velocidad que la mejor aproximación.

Definición 5.1.5. En el caso de que C_h esté acotada, el método se denomina *estable*.

Si el método es estable, la solución aproximada converge a la solución exacta a la misma velocidad que el mejor error de aproximación.

5.1.4. Condición *LBB*. Estabilidad de los métodos mixtos.

La teoría básica diseñada anteriormente se aplica igualmente a los métodos mixtos. Por ejemplo, considérese de nuevo el problema de la elasticidad lineal, y por simplicidad supóngase que las condiciones de contorno son $\Gamma_u = \partial\Omega$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. Ya ha sido desarrollada en esta tesis la formulación variacional del problema, que es

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad \text{para } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \quad (5.1.7)$$

mientras que para la formulación mixta podría ser, por ejemplo,

$$a((\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{v})) = \int_{\Omega} \left(\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}^* + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{u} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{v} \right) d\Omega,$$

para $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{v}) \in H(\text{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$, denotando por $\boldsymbol{\sigma}^*$ al tensor de tensiones del espacio de búsqueda.

La mayor diferencia entre ambas formulaciones radica en encontrar espacios de funciones que presenten aproximaciones estables. Para los métodos basados en desplazamientos no existe esta dificultad.

Retomando aspectos comentados anteriormente en el apartado 2.1.2 del capítulo 2, se tienen los siguientes resultados.

Proposición 5.1.3. *Cualquier elección que se haga de los subespacios $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, para métodos basados en desplazamientos únicamente, produce una aproximación estable.*

Demostración. (ARNOLD [1990]) Como la forma bilineal (5.1.7) es coercitiva, véase (2.1.15), es decir, dado $\alpha > 0$ se tiene que

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|^2, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

La solución discreta $\mathbf{u}_h \in V$ está definida por las ecuaciones

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}), \quad \text{para } \mathbf{v} \in V_h.$$

Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}_h$ y teniendo en cuenta la coercitividad de la forma bilineal y la definición de la norma dual $\|\cdot\|_*$ (5.1.4), se tiene que

$$\alpha \|\mathbf{u}_h\|^2 \leq a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = f(\mathbf{u}_h) \leq \|f\|_* \|\mathbf{u}_h\|$$

por consiguiente

$$\|\mathbf{u}_h\| \leq \alpha^{-1} \|f\|_*.$$

Por lo tanto, la constante de estabilidad C_h (5.1.5) para esta discretización está acotada por $\frac{1}{\alpha}$ sin depender de la elección del subespacio V_h . Por lo tanto el error es del mismo orden que el error de la mejor aproximación. La elección del subespacio depende simplemente de consideraciones de aproximación y eficiencia de la aproximación. Por lo tanto, los métodos de Galerkin basados en formulaciones coercitivas son siempre estables². \square

Nota 5.1.3. Para los métodos mixtos el espacio V se descompone como el producto de dos espacios $V = S \times W$ y la forma bilineal tiene una forma especial

$$a((\mathbf{s}, \mathbf{u}), (\mathbf{t}, \mathbf{v})) = c(\mathbf{s}, \mathbf{t}) + b(\mathbf{t}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{s}, \mathbf{v})$$

²Suponiendo que los espacios de búsqueda y de funciones test son idénticos. Los métodos Petrov-Galerkin basados en formulaciones coercitivas no son necesariamente estables.

con $c : S \times S \longrightarrow \mathcal{R}$ y $b : S \times W \longrightarrow \mathcal{R}$ formas bilineales.

Una consecuencia de esta descomposición es que en los métodos mixtos, la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ nunca es coercitiva, así que la estabilidad de la aproximación no es automática. Aunque $a(\cdot, \cdot)$ no es coercitiva, $c(\cdot, \cdot)$ sí lo es.

Se puede demostrar (véase ARNOLD [1990]) que la constante de estabilidad de una formulación mixta puede ser acotada en los mismos términos que la constante de coercitividad α para la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ mediante la cantidad

$$\beta_h = \inf_{\mathbf{v} \in W_h} \sup_{\mathbf{s} \in S_h} \frac{b(\mathbf{s}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{s}\| \|\mathbf{v}\|}. \quad (5.1.8)$$

En particular, si se elige una sucesión de S_h y W_h para los cuales β_h está acotada distinta de cero, el método correspondiente es estable.

Definición 5.1.6. La condición que establece que β_h está acotada y distinta de cero, se conoce como la condición *inf-sup* o *LBB*.

Nota 5.1.4. Nótese que si se incrementa el espacio S_h , para un W_h fijado, la constante β_h crece. En otras palabras, para problemas con la forma bilineal $c(\cdot, \cdot)$ coercitiva, el enriquecimiento del espacio S_h incrementa la estabilidad. Esta propiedad es la base de la formulación mixta que se presentará más adelante para el método de los elementos naturales.

5.2 Ecuaciones de gobierno

Aunque la teoría anterior se ha desarrollado para una formulación mixta genérica, el objeto de este capítulo es el desarrollo de una formulación estable para el problema de la Mecánica de Medios Continuos Incompresibles. Las ecuaciones para este problema vienen dadas por:

1. Ecuaciones de Equilibrio (en ausencia de fuerzas de inercia y de fuerzas exteriores):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega. \quad (5.2.1)$$

2. Medio incompresible:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \quad (5.2.2)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ representa el tensor de tensiones de Cauchy y \mathbf{u} el vector de desplazamientos en Mecánica de Sólidos, y usualmente representa el vector velocidad en Mecánica de Fluidos. Las condiciones de contorno son:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ en } \Gamma_t \quad (5.2.3)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_u. \quad (5.2.4)$$

donde \mathbf{n} es la normal exterior al contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$, con $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$.

Si se suponen pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones para un sólido elástico e isótropo, las ecuaciones de comportamiento pueden expresarse como:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\nabla^s\mathbf{u} \quad (5.2.5)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{p}{\lambda} \quad (5.2.6)$$

donde p representa la presión y ∇^s la parte simétrica del operador gradiente, obteniéndose el tensor de pequeñas deformaciones de Cauchy en el caso de Mecánica de Sólidos, o bien, el tensor de velocidad de deformación para el caso de Mecánica de Fluidos.

Definición 5.2.1. En las ecuaciones (5.2.5) y (5.2.6) anteriores λ y μ representan los parámetros de Lamé, que caracterizan el comportamiento del material, y están expresados en términos del modulo de Young E y del coeficiente de Poisson ν como

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad (5.2.7)$$

Nota 5.2.1. Cuando ν se aproxima a 0.5, se observa claramente que λ tiende al infinito, así que la ecuación (5.2.6) representa la restricción de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

La formulación débil o variacional para esta clase de problemas se establece usualmente como:

$$\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega = \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V} \quad (5.2.8)$$

$$\int_{\Omega(t)} \left(-\nabla\mathbf{u} + \frac{1}{\lambda}p \right) p^* d\Omega = 0 \quad \forall p^* \in L_2(\Omega(t)), \quad (5.2.9)$$

donde $\mathcal{U} = \{\mathbf{u} / \mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \bar{\mathbf{u}}\}$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{u}^* / \mathbf{u}^* \in H^1(\Omega), \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = 0\}$, y Γ_u y Γ_t son las porciones de contorno del dominio Ω donde están prescritos los

desplazamientos (velocidades) y tensiones, respectivamente. $\bar{\mathbf{t}}$ y $\bar{\mathbf{u}}$ representan tales tensiones y desplazamientos.

5.2.1. Aproximación de las variables del problema.

Si se aproximan los desplazamientos (velocidades) y presiones empleando un conjunto de dimensión finita de funciones de base, se llega a una forma discreta de las ecuaciones previas (5.2.1)-(5.2.6) (método de Bubnov-Galerkin).

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (5.2.10)$$

$$\mathbf{p}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \psi_I(\mathbf{x}) p_I. \quad (5.2.11)$$

donde n representa el número de nodos considerados en la aproximación. Las funciones $\psi_I(\mathbf{x})$ y $\phi_I(\mathbf{x})$ representan algún tipo de interpolación por vecinos naturales, desarrolladas ya en el capítulo 3.

Se obtiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas,

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.12)$$

donde,

$$\bar{\mathbf{K}}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B}_J d\Omega \quad (5.2.13)$$

$$\mathbf{G}_{IJ} = - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}_I^T \psi_J d\Omega \quad (5.2.14)$$

$$\mathbf{M}_{IJ} = - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \psi_I \psi_J d\Omega \quad (5.2.15)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} \phi_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (5.2.16)$$

y

$$\tilde{\mathbf{B}}_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,1}(x) & \phi_{I,2}(x) \end{bmatrix} \quad (5.2.17)$$

$$\mathbf{B}_I = \begin{pmatrix} \phi_{I,1}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \phi_{I,2}(\mathbf{x}) \\ \phi_{I,2}(\mathbf{x}) & \phi_{I,1}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (5.2.18)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{IJKL} = \mu(\delta_{IK}\delta_{JL} + \delta_{IL}\delta_{JK}) \quad (5.2.19)$$

Nótese que si se está considerando una situación de incompresibilidad total, $\mathbf{M} = 0$.

Nota 5.2.2. No todas las posibles combinaciones para las aproximaciones desplazamientos-presiones construidas de esta forma presentan resultados convergentes y estables (véase, por ejemplo, BATHE [1996]). Las condiciones a satisfacer por la aproximación elegida ya han sido comentadas, tanto el cumplimiento de la condición *inf-sup* (BABUŠKA [1973], BREZZI [1974]), como la condición de coercitividad de la formulación resultante.

La condición *inf-sup* puede escribirse en este caso como

$$\inf_{p^h \in \mathcal{P}_h} \sup_{\mathbf{u}^h \in \mathcal{U}_h} \frac{\int_{\Omega} p^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega}{\|p^h\|_0 \|\mathbf{u}^h\|_1} = \gamma_h \geq \gamma > 0 \quad (5.2.20)$$

donde γ es una constante positiva independiente de la separación nodal, h . \mathcal{U}_h y \mathcal{P}_h representan la aproximación del espacio de desplazamientos y del espacio de presiones, respectivamente, cuyas normas están definidas por

$$\|\cdot\|_0^2 = \int_{\Omega} (\cdot)^2 d\Omega \quad (5.2.21)$$

$$\|\cdot\|_1^2 = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial(\cdot)_i}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega \quad (5.2.22)$$

Esta condición en raras ocasiones se demuestra analíticamente. En su lugar, su cumplimiento se prueba usualmente de forma numérica mediante un test propuesto por CHAPELLE Y BATHE [1993], que se comenta en la sección 5.3.1.

5.3 Aproximaciones mixtas en métodos de Galerkin de vecindad natural

En esta sección se desarrolla una formulación mixta basada en el uso de la interpolación por vecinos naturales en el marco del método de Galerkin. Como se ha comentado anteriormente, la estrategia consiste en el enriquecimiento del espacio de búsqueda de los desplazamientos (para el problema de la Elasticidad) o de las velocidades (para el problema de Stokes).

En SUKUMAR [1998] y en CUETO ET AL. [2001], se han empleado aproximaciones mixtas usando interpolación de Sibson para los desplazamientos e interpolación de Thiessen (constante en las celdas de voronoi) para las presiones.

Aunque la aproximación así desarrollada ha sido empleada con éxito en la simulación de diversos problemas de Mecánica de Fluidos tanto newtonianos como no-newtonianos, (véase por ejemplo MARTÍNEZ ET AL. [2003]), se deduce que ésta es muy similar a la estructura de los Elementos Finitos triangulares con desplazamientos lineales y presión constante, que no verifica la condición *inf-sup*.

5.3.1. Test numérico para la condición *inf-sup*

Ante la dificultad de probar analíticamente la condición *inf-sup*, BATHE [1996] y CHAPELLE Y BATHE [1993] proponen un test numérico basado en el uso de un conjunto de mallas finito y pequeño.

Proposición 5.3.1. *La condición inf-sup (expresión (5.2.20)), se puede desarrollar en la siguiente forma discreta*

$$\inf_{\mathbf{w}_h \in \mathcal{P}_h} \sup_{\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h} \frac{\mathbf{W}_h^T \mathbf{G}_h \mathbf{U}_h}{\sqrt{\mathbf{W}_h^T \mathbf{G}_h \mathbf{W}_h} \cdot \sqrt{\mathbf{U}_h^T \mathbf{S}_h \mathbf{U}_h}} = \gamma_h \geq \gamma > 0 \quad (5.3.1)$$

donde \mathbf{W}_h y \mathbf{U}_h son vectores de los desplazamientos nodales correspondientes a \mathbf{w}_h y \mathbf{u}_h . \mathbf{G}_h y \mathbf{S}_h son las matrices asociadas a las normas

$$\|p_h\|_0^2 = \mathbf{W}_h^T \mathbf{G}_h \mathbf{W}_h \quad (5.3.2)$$

$$\|\mathbf{u}_h\|_1^2 = \mathbf{U}_h^T \mathbf{S}_h \mathbf{U}_h \quad (5.3.3)$$

\mathbf{G}_h y \mathbf{S}_h son matrices semidefinida positiva y definida positiva, respectivamente (CHAPELLE Y BATHE [1993]).

Problema de valores propios equivalente

Como es imposible desarrollar un número infinito de mallas que verifiquen la condición (5.2.20), la condición *inf-sup* no puede verificarse tampoco numéricamente. Lo que sí se puede hacer es obtener un valor numérico de la expresión (5.3.1) anterior, para un conjunto de mallas elegidas apropiadamente, e intentar describir una predicción sobre la verificación de la condición *inf-sup*.

La evaluación numérica es posible teniendo en cuenta los siguientes resultados demostrados en CHAPELLE Y BATHE [1993],

Proposición 5.3.2. BATHE [1996] *Considérese el siguiente problema de valores propios generalizado,*

$$\mathbf{G}_h \mathbf{U}_h = \lambda \mathbf{S}_h \mathbf{U}_h, \quad (5.3.4)$$

donde \mathbf{G}_h y \mathbf{U}_h son las matrices definidas en (5.3.1). Se denota por λ_k el primer valor propio no nulo. Entonces, el valor de γ_h es simplemente $\sqrt{\lambda_k}$.

Demostración. Se puede probar dicho resultado con la ayuda de un ejemplo.

Considérese la función $f(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ definida como

$$f(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{\mathbf{U}^T \mathbf{G} \mathbf{V}}{(\mathbf{U}^T \mathbf{G} \mathbf{U})^{1/2} (\mathbf{V}^T \mathbf{S} \mathbf{V})^{1/2}} \quad (5.3.5)$$

donde \mathbf{G} es una matriz $n \times n$ simétrica semidefinida positiva, \mathbf{S} es una matriz $n \times n$ simétrica definida positiva, y \mathbf{U}, \mathbf{V} son vectores de orden n . Es necesario demostrar que

$$\inf_{\mathbf{U}} \sup_{\mathbf{V}} f(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \sqrt{\lambda_k} \quad (5.3.6)$$

donde λ_k es el menor valor propio no nulo del problema

$$\mathbf{G}\phi = \lambda \mathbf{S}\phi. \quad (5.3.7)$$

Sean los valores propios del problema (5.3.7), ordenados en un orden creciente

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = 0 < \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_n$$

y sus correspondientes vectores propios $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$.

Para evaluar $f(\mathbf{U}, \mathbf{V})$, se representan \mathbf{U} y \mathbf{V} como

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \phi_i \tilde{u}_i \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \phi_i \tilde{v}_i$$

Por lo tanto, para cualquier \mathbf{U} ,

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{V}} f(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \sup_{\tilde{v}_i} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i \tilde{v}_i}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i^2\right)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i^2\right)^{1/2}} \sup_{\tilde{v}_i} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i \tilde{v}_i}{\left(\sum_{i=1}^n \tilde{v}_i^2\right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Para evaluar el valor del supremo en la ecuación anterior (5.3.8), se define $\alpha_i = \lambda_i \tilde{u}_i$, obteniéndose entonces que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i \tilde{v}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{v}_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i^2} \quad (5.3.9)$$

(por la desigualdad de Schwarz), e igualmente se obtiene cuando $\tilde{v}_i = \alpha_i$. Sustituyendo lo obtenido en (5.3.9) en (5.3.8), y haciendo uso de $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = 0$, se obtiene que,

$$\sup_{\mathbf{V}} f(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \tilde{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i^2 \tilde{u}_i^2}{\sum_{i=k}^n \lambda_i \tilde{u}_i^2}}$$

Si se denota $\sqrt{\lambda_i \tilde{u}_i}$ por β_i , la expresión anterior se puede escribir como,

$$\inf_{\mathbf{U}} \sup_{\mathbf{V}} f(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \inf_{(\tilde{u})_{i=1}^n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \tilde{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{u}_i^2}} = \inf_{(\beta_i)_{i=1}^n} \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i^2 \beta_i^2}{\sum_{i=k}^n \lambda_i \beta_i^2}} \quad (5.3.10)$$

Esta última expresión (5.3.10) tiene la forma de un cociente de Rayleigh³, siendo el menor valor $\sqrt{\lambda_k}$, válido para $\beta_k \neq 0$ y $\beta_i = 0$, para $i \neq k$, el cual es el resultado buscado. \square

Nota 5.3.1. La existencia de valores propios nulos significa que existen modos espurios de presión (BATHE [1996]).

Si se tiene que la presión es continua, existe un segundo resultado interesante para el cálculo que nos ocupa.

³Dado un problema de valores propios $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, el cociente de Rayleigh $\rho(\mathbf{v})$, viene definido por $\rho(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}$.

Proposición 5.3.3. *Considérese el segundo problema de valores propios,*

$$\mathbf{G}'_h \mathbf{Q}_h = \lambda' \mathbf{M}_h \mathbf{Q}_h, \quad (5.3.11)$$

donde $\mathbf{G}'_h = \mathbf{B}_h \mathbf{S}_h^{-1} \mathbf{B}_h^t$. Se denota ahora por λ'_k al primer valor propio no nulo. Entonces, λ'_k es igual a λ_k del primer problema (5.3.4).

Demostración. Se remite al lector interesado a la obra de BATHE [1996]. \square

Nota 5.3.2. En el caso continuo, \mathbf{G}'_h no es más fácil que calcular que \mathbf{G}_h , pero al menos \mathbf{G}'_h tiene la dimensión del espacio de presiones en lugar del de desplazamientos, y el problema de valores propios se simplifica.

En la práctica, lo ideal sería calcular el valor $\sqrt{\lambda_k}$, valor propio solución, de forma rutinaria, de tal forma que pueda pasarse por alto todos los valores propios nulos y calcular así λ_k .

Proposición 5.3.4. *Si la aproximación construida para un problema dado, tiene n_p grados de libertad en presiones y n_u grados de libertad en desplazamientos, el número de modos espurios de presión viene dado por*

$$k_{pm} = k - (n_u - n_p - 1) \quad (5.3.12)$$

Si $k_{pm} > 0$, entonces la discretización contiene modos de presión constante o modos espurios de presión.

Demostración. De nuevo, se remite al lector interesado a la obra de BATHE [1996]. \square

BATHE [1996] ha propuesto el uso de una sucesión de tres o más mallas para obtener una aproximación del valor numérico λ_k . Si el valor γ_h no tiene una tendencia constante, alejada de 0, la condición *inf-sup* no se satisface (5.3.1).

Este simple test puede ser de gran ayuda a la hora de determinar si una aproximación desarrollada verifica la condición *inf-sup*. Para los resultados numéricos presentados en la sección 5.5, se observa claramente cómo la aproximación Sibson-Thiessen para desplazamientos y presiones (respectivamente) no verifica la condición *inf-sup*. Sin embargo, tal y como se ha comentado anteriormente, esta aproximación ha sido usada satisfactoriamente (SUKUMAR [1998], MARTÍNEZ ET AL. [2003], CUETO ET AL. [2003b], CUETO ET AL. [2001]) sin haber detectado bloqueo alguno o modos espurios de presión. De tal forma que se puede asegurar que el

comportamiento de la aproximación es similar al elemento finito cuadrilátero con desplazamiento bilineal y presión constante.

Siguiendo estos resultados, es de esperar que un enriquecimiento del espacio de desplazamientos interpolado mediante aproximaciones de vecinos naturales pueda ofrecer formulaciones que cumplan la condición *inf-sup*. Sin embargo, las aproximaciones de vecinos naturales reproducen a lo sumo espacios de polinomios lineales (SUKUMAR ET AL. [1998]). De hecho, existe un esquema de interpolación que reproduce polinomios cuadráticos (véase SUKUMAR [1998] y las referencias en él citadas), pero requiere la interpolación de las derivadas del campo esencial y esto requiere un alto coste computacional. Así, una buena solución a este problema podría ser el enriquecimiento de los interpolantes haciendo uso del paradigma de la Partición de la Unidad (BABUŠKA Y MELENK [1996]). Esta aproximación ha sido empleada previamente en WELLS ET AL. [2002] para enriquecer nodos sometidos a deformaciones plásticas en una malla de Elementos Finitos triangulares. A continuación se van a analizar y desarrollar algunas aproximaciones enriquecidas para el método de los elementos naturales.

5.4 Partición de la Unidad en métodos de Galerkin de Vecindad Natural

5.4.1. El método de partición de la unidad

En la sección 2.8 ya ha sido presentado el Método de Partición de la Unidad (BABUŠKA Y MELENK [1996]). La idea principal de este método es la construcción de aproximaciones enriquecidas añadiendo funciones al espacio de búsqueda que aproximen la solución con mayor precisión. Recordando brevemente la filosofía de este método, sea $\{\Omega_I\}$ un recubrimiento abierto del dominio Ω , (cada Ω_I es un abierto, y juntos forman un cubrimiento de Ω), y sea $\{\phi_I\}$ una partición de la unidad construida sobre dicho cubrimiento. Sea también $V_I \subset H^1(\Omega_I \cap \Omega)$. Siguiendo a BABUŠKA Y MELENK [1996], el *espacio PUM*, V , se define como:

$$V := \sum_I \phi_I V_I = \left\{ \sum_I \phi_I v_I / v_I \in V_I \right\} \subset H^1(\Omega) \quad (5.4.1)$$

Los espacios V_I se llaman *espacios de aproximación local*.

En trabajos anteriores, ODEN ET AL. [1998] y STROUBOULIS ET AL. [2001], dado que las funciones de forma del método de los Elementos Finitos forman una

partición de la unidad, proponen un enriquecimiento de la aproximación por Elementos Finitos añadiendo nuevos términos polinomiales a las funciones de forma.

El propósito de este capítulo de la tesis es desarrollar un método de aproximación por vecinos naturales enriquecido. El objetivo es enriquecer la aproximación usada en el campo de desplazamientos para que se reproduzcan polinomios de mayor orden. Para ello se añadirán nuevas funciones a la aproximación construida mediante:

$$N_{I\alpha} := \phi_I L_\alpha \quad (5.4.2)$$

donde L_α es un polinomio de grado p . Como las funciones de forma de vecinos naturales forman una partición de la unidad, se tiene que

$$\sum_I N_{I\alpha} = \sum_I \phi_I L_\alpha = L_\alpha \sum_I \phi_I = L_\alpha \quad (5.4.3)$$

Se puede ver entonces cómo los polinomios L_α se reproducen exactamente por la aproximación construida.

Sin embargo, como las coordenadas Sibson o Laplace reproducen exactamente polinomios lineales, existen constantes a_{xI} , a_{yI} , $I = 1, \dots, n$ tales que

$$\sum_I a_{xI} \phi_I = x \quad (5.4.4)$$

$$\sum_I a_{yI} \phi_I = y, \quad (5.4.5)$$

Así, si se toman $L_\alpha = x$ o $L_\alpha = y$ se llega a una dependencia lineal de las funciones de base. A la hora de resolver el sistema discreto de ecuaciones resultantes, en DUARTE ET AL. [2000] se propone una técnica particularmente útil si no se puede evitar esta dependencia lineal.

Proposición 5.4.1. STROUBOULIS ET AL. [2001] Denotando el sistema de ecuaciones Galerkin resultante (ecuación (5.2.12)) en forma matricial, mediante $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{p}}$, donde $\tilde{\mathbf{A}}$ es una matriz semidefinida positiva, se puede hacer uso de un algoritmo, el cual, perturba la matriz de la siguiente forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T} \quad (5.4.6)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{d}} \quad (5.4.7)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{p}} \quad (5.4.8)$$

con

$$T_{IJ} = \frac{\delta_{IJ}}{\sqrt{\tilde{A}_{IJ}}} \quad (5.4.9)$$

El sistema resultante $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{p}$ tiene una matriz de rigidez con elementos unitarios en la diagonal. Esta matriz se perturba posteriormente

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I} \quad \varepsilon > 0 \quad (5.4.10)$$

y la matriz resultante \mathbf{A}_ε es no singular. Para el cálculo de la solución del sistema original, es necesario seguir el siguiente procedimiento iterativo:

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{A}_\varepsilon^{-1}\mathbf{p} \quad (5.4.11)$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{p} - \mathbf{A}\mathbf{d}_0 \quad (5.4.12)$$

Denotando $\mathbf{e}_0 = \mathbf{d} - \mathbf{d}_0$. Entonces,

$$\mathbf{A}_\varepsilon\mathbf{e}_0 \simeq \mathbf{A}\mathbf{e}_0 = \mathbf{A}\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{d}_0 = \mathbf{r}_0 \quad (5.4.13)$$

El algoritmo calcula

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 - \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{A}_j \quad (5.4.14)$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{A}_\varepsilon^{-1}\mathbf{r}_i \quad (5.4.15)$$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{e}_j \quad (5.4.16)$$

hasta que converja dentro de un cierto nivel. La solución final viene dada por $\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{T}$.

Nota 5.4.1. En la práctica, es suficiente una perturbación del orden de $\varepsilon = 10^{-10}$ en una sola iteración, trabajando con doble precisión.

5.4.2. Interpolantes por vecinos naturales enriquecidos

Como se ha mencionado anteriormente, el objetivo de este capítulo es enriquecer aproximaciones basadas en vecinos naturales para que cumplan la condición *inf-sup*. En este apartado se van a considerar algunas de todas las posibles combinaciones para aproximar los espacios $\mathbf{u} - p$.

Recuérdese que cuando el problema se aproxima a una incompresibilidad total (i.e., λ tiende a no estar acotada), el objetivo es mantener la distancia entre la solución exacta y el espacio de aproximación acotado,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\| \leq c \cdot d(\mathbf{u}, \mathcal{U}_h) \quad (5.4.17)$$

con una constante c independiente del tamaño de la nube de puntos h , y λ . Cuando λ crece, la cantidad $\|\operatorname{div} \mathbf{u}^h\|$ debe disminuir para verificar que la presión p_h es un valor finito en el límite de la incompresibilidad total. Así, el espacio de desplazamientos $K(0) = \{\mathbf{u}^h / \mathbf{u}^h \in \mathcal{U}_h, \operatorname{div} \mathbf{u}^h = 0\}$ debe ser lo más rico posible. Para ello se han probado algunos enriquecimientos del campo de desplazamientos, combinados con interpolaciones tanto de tipo Thiessen como Sibson, para el campo de presiones. A continuación se presentan estos enriquecimientos y más adelante los resultados obtenidos por ellos.

Elemento Natural Sibson-Thiessen.

La primera y más obvia posibilidad es el empleo de una interpolación mixta Sibson-Thiessen para los desplazamientos y las presiones, tal y como se describe en el apartado 5.3. Los resultados para el test numérico de la condición *inf-sup* sobre un conjunto de mallas está descrito en la sección 5.5.1. Se puede observar que el espacio de aproximación para los desplazamientos no es lo suficientemente rico para satisfacer la condición *inf-sup*.

Enriquecimiento de los desplazamientos mediante los polinomios $\{1, x^2, y^2\}$.

En primer lugar, se va a enriquecer la aproximación del campo de desplazamientos añadiendo el conjunto de polinomios $\{1, x^2, y^2\}$ a las funciones de base. La aproximación resultante es

$$\Phi = \phi_I \times \{1, x^2, y^2\}, \quad I = 1, \dots, n \quad (5.4.18)$$

donde n es el número de nodos de la malla.

Proposición 5.4.2. *Teniendo en cuenta la aproximación enriquecida (5.4.18), se tiene que*

$$\operatorname{span}\{\Phi\} = \operatorname{span}\{1, x, y, x^2, y^2, x^3, y^3, x^2y, xy^2\} \quad (5.4.19)$$

Este enriquecimiento en particular determina un espacio de polinomios incompleto de orden 3. Su elección ha sido consecuencia de evitar dependencias lineales

en las bases del espacio de aproximación. Sin embargo, tal y como se demuestra en el apartado de resultados numéricos 5.5.1, esta clase particular de enriquecimiento determina una aproximación con modos espurios de presión. Así, se deduce que la aproximación resultante debe reproducir al menos el polinomio bilineal. Esta parece ser la misma conclusión obtenida en WELLS ET AL. [2002], donde los nodos pertenecientes a los triángulos de una aproximación mediante Elementos Finitos lineales y sometidos a un flujo plástico están enriquecidos mediante el empleo del conjunto de polinomios $\{1, x^2, xy, y^2\}$.

Enriquecimiento de los desplazamientos mediante los polinomios $\{1, x, y, xy\}$.

Como se ha mencionado anteriormente, parece ser que la aproximación debe ser capaz de reproducir completamente al menos el polinomio bilineal. Por esta razón en este apartado se analiza el comportamiento del elemento natural resultante cuando el enriquecimiento está compuesto por los monomios $\{1, x, y, xy\}$. El espacio de aproximación resultante estará compuesto por

$$\Phi = \phi_I \times \{1, x, y, xy\}, \quad I = 1, \dots, n. \quad (5.4.20)$$

Se puede entonces concluir que

Proposición 5.4.3.

$$\text{span}\{\Phi\} = \text{span}\{1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2\}. \quad (5.4.21)$$

Además, este conjunto resultante es linealmente dependiente, con una deficiencia de rango de orden 4.

Demostración. Como las funciones de forma de Sibson o de Laplace reproducen campos de polinomios lineales, como se ha visto en un capítulo anterior (3.3), existirán constantes $a_I^x, a_I^y, I = 1, \dots, n$, tales que $\forall x \in \Omega$,

$$\sum_{I=1}^n \phi_I(x) = 1 \quad (5.4.22)$$

$$\sum_{I=1}^n a_I^x \phi_I(x) = x \quad (5.4.23)$$

$$\sum_{I=1}^n a_I^y \phi_I(x) = y \quad (5.4.24)$$

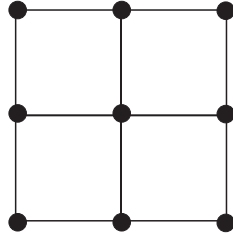


Figura 5.1: Nube de 9 nodos sobre una malla regular.

donde n representa el número de vecinos naturales en un lugar determinado. Así, $\{1, x, y\} \subset \text{span}\{\Phi\}$. Usando la propiedad de partición de la unidad,

$$\sum_{I=1}^n (\phi_I x) = x \sum_{I=1}^n \phi_I = x \quad (5.4.25)$$

Junto con la ecuación (5.4.23), se tiene que

$$\sum_{I=1}^n (\phi_I x) - \sum_{I=1}^n a_I^x \phi_I = 0 \quad (5.4.26)$$

existiendo así dependencia lineal.

Este mismo razonamiento puede ser aplicado al término y del enriquecimiento. \square

Nota 5.4.2. Nótese que

$$\sum_{I=1}^n a_I^x (\phi_I y) = y \sum_{I=1}^n a_I^x \phi_I = xy \quad (5.4.27)$$

y, en consecuencia,

$$\sum_{I=1}^n a_I^x (\phi_I y) - \sum_{I=1}^n a_I^y (\phi_I x) = 0 \quad (5.4.28)$$

Se puede concluir que el algoritmo descrito en el apartado 5.4.1 debe ser usado para invertir la resultante matriz de rigidez.

Las funciones de forma resultantes y sus derivadas, mediante el uso de esta aproximación enriquecida, para el nodo central de la figura 5.1, se muestran en las figuras 5.2(a), (b) y (c).

En contraste con las formulaciones previas, este enriquecimiento determina un

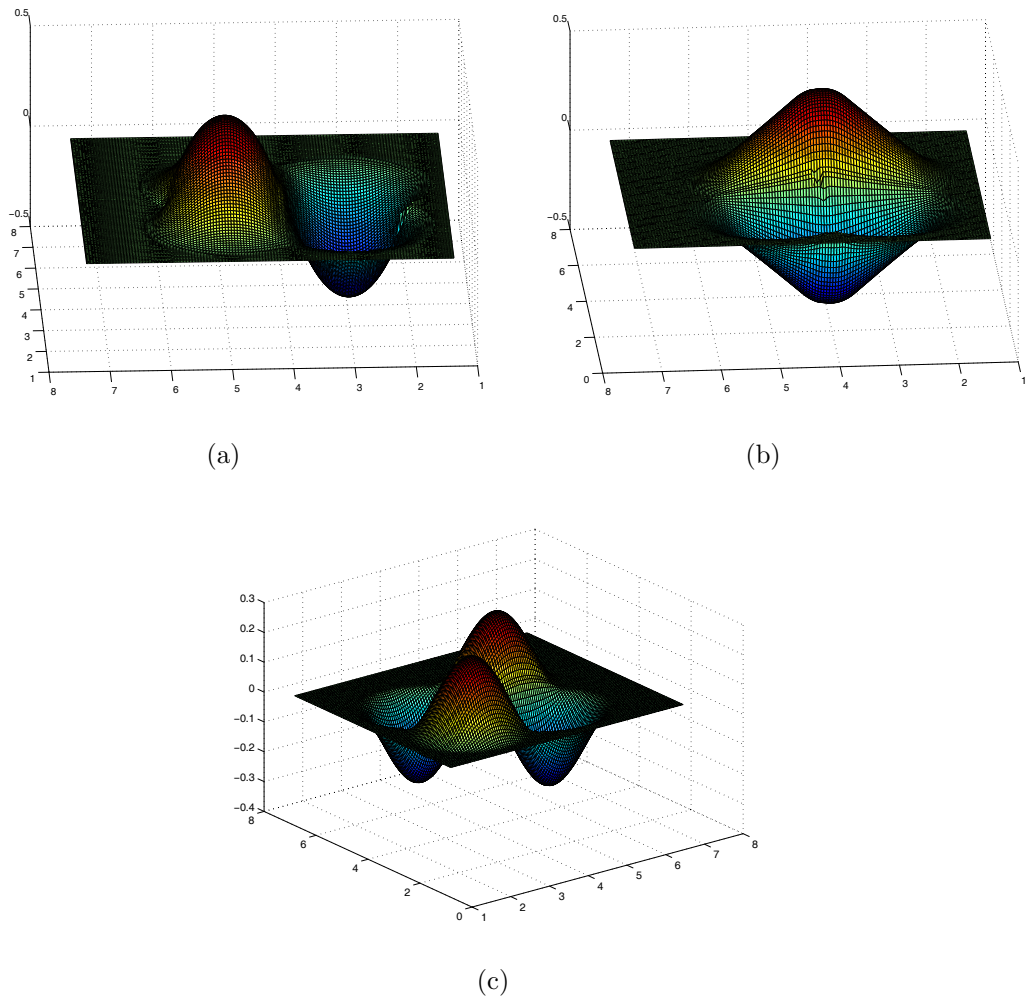


Figura 5.2: Representación de las funciones de forma $\phi \cdot x$ (a), $\phi \cdot y$ (b) y $\phi \cdot xy$ (c)

elemento que verifica el test numérico de la condición *inf-sup*, como se demuestra en la sección de resultados numéricos de este capítulo 5.5.1.

Enriquecimiento de los desplazamientos mediante los polinomios $\{1, x, y, xy\}$ y campo de presiones continuo.

Esta formulación se obtiene por el uso de un enriquecimiento idéntico al del apartado anterior, salvo que ahora se presenta una aproximación continua (Sibson) en el campo de presiones. El análisis presentado anteriormente para el campo de desplazamientos se mantiene igual en este caso. Esta formulación verifica el test numérico de la condición *inf-sup* y ofrece similitudes con el elemento anterior.

Enriquecimiento de los desplazamientos mediante los polinomios $\{1, xy\}$.

Finalmente, si se enriquece la aproximación del campo de desplazamientos con el conjunto de polinomios (monomios) $\{1, xy\}$ se obtiene una independencia lineal del conjunto de las funciones de base.

$$\Phi = \phi_I \times \{1, xy\}, \quad I = 1, \dots, n \quad (5.4.29)$$

Se puede concluir que

Proposición 5.4.4.

$$\text{span}\{\Phi\} = \text{span}\{1, x, y, xy, x^2y, xy^2\}. \quad (5.4.30)$$

Este enriquecimiento (5.4.29) verifica la condición *inf-sup* —tanto con interpolaciones Sibson como Thiessen para las presiones— y proporciona una excelente precisión, como se muestra en la sección 5.5.

Nota 5.4.3. Esta formulación tiene cierto parecido con el elemento finito MINI, desarrollado por ARNOLD ET AL. [1984] (elemento finito triangular lineal con enriquecimiento burbuja y presiones discontinuas).

En medio del amplio rango de posibles campos de enriquecimiento, este último parece ofrecer una formulación estable y no presenta dependencia lineal en el conjunto de funciones de base. Así, no es necesario el empleo de una técnica de perturbación para resolver el sistema de ecuaciones resultante. En este sentido, esta formulación parece ser óptima, tanto desde un punto de vista de estabilidad como por el bajo número de grados de libertad que emplea.

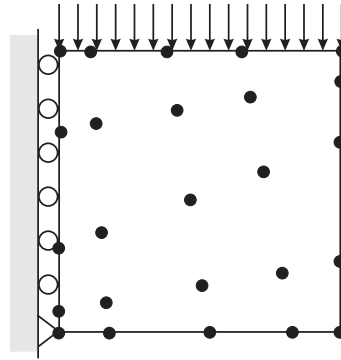


Figura 5.3: Geometría del problema usado para evaluar el test numérico de la condición *inf-sup*.

5.5 Resultados Numéricos

5.5.1. Test numérico para la condición *inf-sup*

Tal y como se ha explicado anteriormente, BATHE [1996] propone el uso de una sucesión de tres o más mallas para evaluar el valor propio mínimo no nulo de la ecuación (5.3.4). El test sólo es válido para la geometría dada y el problema considerado, pero la aproximación no verificará la condición *inf-sup* si no pasa el test numérico.

Para comprobar si las formulaciones propuestas cumplen con la condición *inf-sup*, se ha probado en una sucesión de tres mallas compuestas de 3×3 , 4×4 y 5×5 nodos, distribuidos de forma regular e irregular sobre un cuadrado unitario, (véase la figura 5.3). Los resultados para estas discretizaciones se muestran en la figura 5.4, incluyendo el test aplicado sobre un Elemento Finito triangular 3/1. Éstos han sido obtenidos restringiendo los vecinos naturales de un punto dado a los tres nodos que forman el triángulo de Delaunay (SUKUMAR ET AL. [1998]). La aproximación de Sibson, enriquecida con $\{1, x, y, xy\}$ para el campo de desplazamientos, ofrece buenos resultados usando tanto interpolaciones Thiessen (C^{-1}) como Sibson para la presión. Sin embargo, el enriquecimiento con los monomios $\{1, x^2, y^2\}$, inicialmente propuesto para evitar la deficiencia de rango de la matriz de rigidez resultante, da lugar a modos espurios de presión. Éstos mismos modos espurios pueden obtenerse para ciertas configuraciones en el elemento Sibson-Thiessen, como en el Elemento Finito bilineal en desplazamientos y constante en presiones (BATHE [1996]).

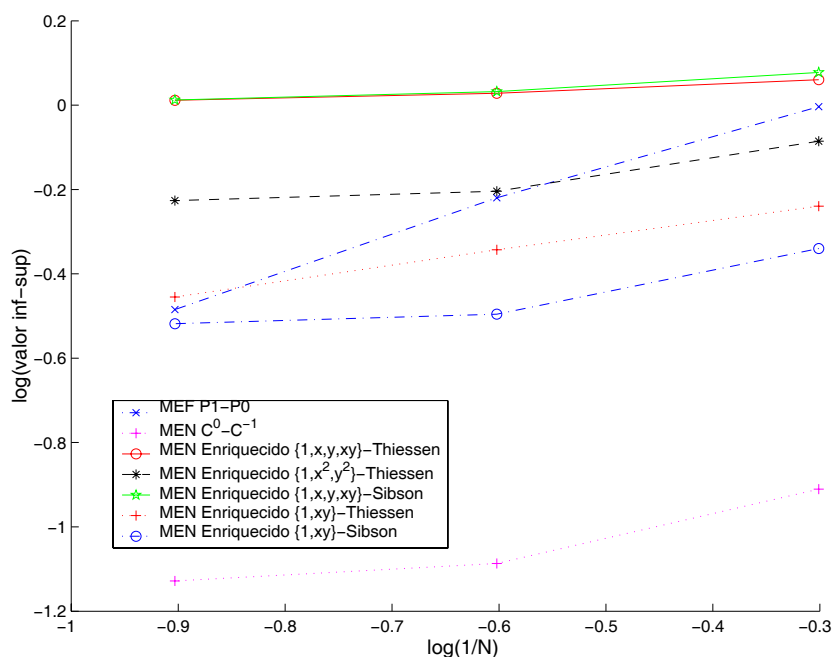


Figura 5.4: Test numérico para la condición *inf-sup* aplicado a las aproximaciones propuestas. Siendo $N = (\text{Número de nodos por lado}) - 1$.

Nota 5.5.1. Aunque los resultados para un único problema no pueden ser extrapolados, la formulación propuesta para el enriquecimiento mediante $\{1, x, y, xy\}$, parece estable y adecuada para una amplia variedad de problemas. Sin embargo, su uso fuerza el empleo de algunas técnicas especiales (como pudiera ser la explicada en el apartado 5.4.1) para resolver el sistema de ecuaciones resultante de la aproximación. El enriquecimiento mediante el monomio $\{1, xy\}$ evita este inconveniente, mientras que a su vez, mantiene las propiedades de estabilidad de la formulación.

En los siguientes ejemplos se analiza el rendimiento de estas formulaciones.

5.5.2. Viga sometida a flexión.

En esta sección se considera una viga bidimensional sometida a una carga distribuida parabólicamente en un extremo y fijada en el otro, tal y como muestra la figura 5.5. Se considera una discretización compuesta por 85 nodos, mostrada en la figura 5.6.

Las características del material son: Módulo de Young 1.0 y el coeficiente de Poisson variando desde 0.4 hasta 0.4999999. Para comprobar el resultado de las formulaciones propuestas, se han comparado los desplazamientos obtenidos numérica-

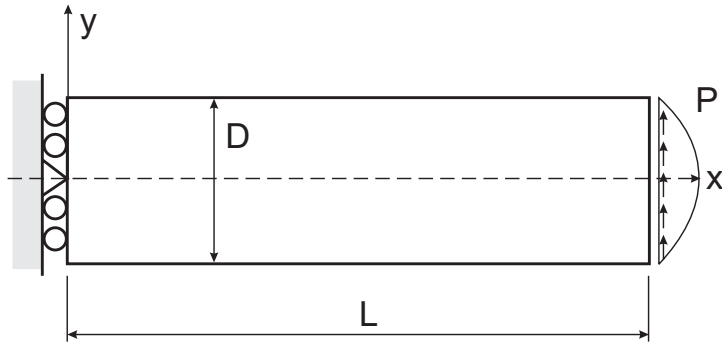


Figura 5.5: Geometría de la viga fija sometida a flexión.

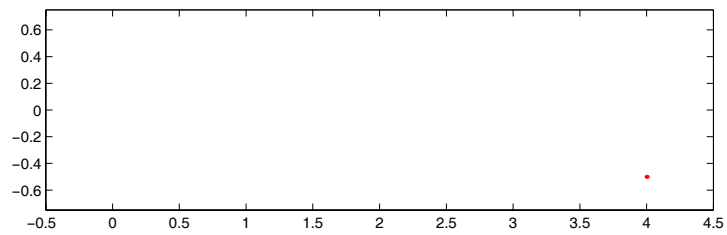


Figura 5.6: Nube de puntos para la simulación de una viga sometida a flexión.

mente mediante la expresión teórica de la flecha, que puede consultarse, por ejemplo, en TIMOSHENKO Y GOODIER [1972].

La solución analítica del problema de viga sometida a flexión, viene dada por

$$\sigma_x = -\frac{Py(L-x)}{I_z} \quad (5.5.1)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (5.5.2)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (5.5.3)$$

y los desplazamientos por,

$$u_x(x, y) = -\frac{Py}{6E'I_z} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu') \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (5.5.4)$$

$$u_y(x, y) = \frac{P}{6E'I_z} \left[3\nu'y^2(L-x) + (4 + 5\nu') \frac{D^2x}{4} + (3L-x)x^2 \right] \quad (5.5.5)$$

donde I_z representa el momento de inercia de la viga, dado por $I_z = D^3/12$. Para el caso de deformación plana, los parámetros del material están definidos por

$$E' = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad (5.5.6)$$

$$\nu' = \frac{\nu}{(1 - \nu)} \quad (5.5.7)$$

La demostración puede consultarse en la mayoría de los libros de elasticidad lineal. Por ejemplo, TIMOSHENKO Y GOODIER [1972].

En este ejemplo, se ha considerado $L = 4,0$ y $D = 1,0$. Nótese que estas dimensiones no se corresponden con lo que habitualmente se denomina barra de Euler-Bernoulli-Navier y que no sería aplicable la teoría de flexión de barras largas.

En la tabla 5.5.2 se presentan los desplazamientos normalizados del nodo del extremo libre ($u_y(L, 0)$). Estos resultados incluyen los del Método de Elementos Finitos, obtenidos usando la misma triangulación de Delaunay que para la construcción de la aproximación. Como era esperado, el método de Elementos Naturales basado en desplazamientos muestra un bloqueo en los resultados a medida que el coeficiente de Poisson tiende a 0.5. Sin embargo, todas las demás aproximaciones construidas están en concordancia con los resultados analíticos. En particular, hay que destacar el buen comportamiento de la aproximación de Sibson-Thiessen, previamente utilizada en simulaciones de Mecánica de Fluidos en MARTÍNEZ ET AL. [2003]. Aunque

Coefficiente de Poisson	0.4	0.4999	0.4999999
<i>MEF</i> -Desplazamientos	93.74	18.73	17.75
<i>MEF</i> -3/3	96.38	94.45	94.45
<i>MEF</i> -3/1	100.61	101.52	101.52
<i>MEN</i> -Desplazamientos	94.36	19.09	19.58
<i>MEN</i> -Sibson-Sibson	96.78	94.93	94.94
<i>MEN</i> -Sibson-Thiessen	99.28	99.07	99.07
<i>MEN</i> Sibson $\times \{1, x^2, y^2\}$ -Thiessen	100.38	100.33	99.34
<i>MEN</i> Sibson $\times \{1, x, y, xy\}$ -Sibson	99.32	100.52	100.52
<i>MEN</i> Sibson $\times \{1, x, y, xy\}$ -Thiessen	99.4	100.7	100.7

Tabla 5.1: Resultados para la viga sometida a flexión, expresado como % del resultado teórico en el extremo de la viga.

es posible imponer ciertas condiciones de contorno que dan lugar a modos espurios de presión (de la misma forma que el Elemento Finito 4/1, véase BATHE [1996]), no se han observado modos espurios de presión a lo largo de estos cálculos.

Los resultados se muestran más uniformes para la aproximación enriquecida mediante interpolantes de Sibson. Ninguno de los enriquecimientos implementados ha tenido modos espurios de presión para este problema y la precisión que muestran es extraordinaria. Sin embargo, el uso de aproximaciones enriquecidas no es intuitivo, debido a que los parámetros nodales del sistema discreto de ecuaciones no representan los desplazamientos nodales.

5.5.3. Problema de placa con agujero

A continuación se presentan las formulaciones enriquecidas aplicadas al conocido problema de una placa infinita con un agujero, sometida a tensión uniaxial constante aplicada en el infinito.

La solución teórica de este problema de la placa con agujero es,

$$u_1(r, \theta) = \frac{a}{8\mu} \left[\frac{r}{a}(\kappa + 1) \cos \theta + 2\frac{a}{r}((1 + \kappa) \cos \theta + \cos 3\theta) - 2\frac{a^3}{r^3} \cos 3\theta \right] \quad (5.5.8)$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{a}{8\mu} \left[\frac{r}{a}(\kappa - 3) \sin \theta + 2\frac{a}{r}((1 - \kappa) \sin \theta + \sin 3\theta) - 2\frac{a^3}{r^3} \sin 3\theta \right] \quad (5.5.9)$$

La demostración puede encontrarse en TIMOSHENKO Y GOODIER [1972], además de otros textos clásicos.

Los parámetros del material son: Módulo de Young $E = 1,0$ y el coeficiente de

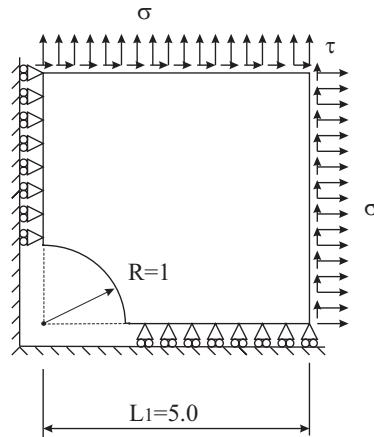


Figura 5.7: Geometría del problema de una placa infinita con agujero sometida a tracción uniaxial.

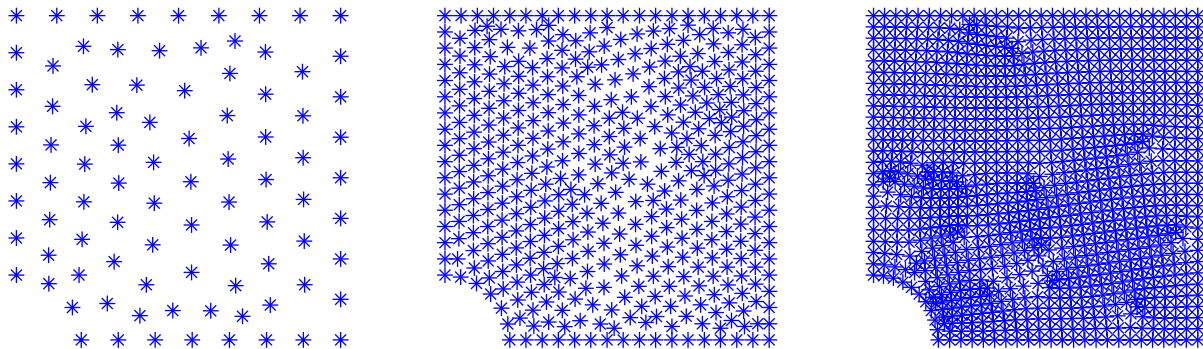


Figura 5.8: Nubes de puntos empleadas en el problema de la placa con agujero.

Poisson ν varía desde 0,4 hasta 0,4999999. μ representa el módulo de cortante y κ es la constante de Kolosov

$$\kappa = 3 - 4\nu \tag{5.5.10}$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \tag{5.5.11}$$

para deformación y tensión plana, respectivamente.

Aplicando condiciones de simetría, solo se modela un cuarto de la placa, y se aplican las tensiones exactas en el contorno del modelo (teóricamente infinito). La geometría del modelo puede observarse en la figura 5.7.

El problema se ha discretizado empleando nubes de 84, 434 y 963 nodos (véase

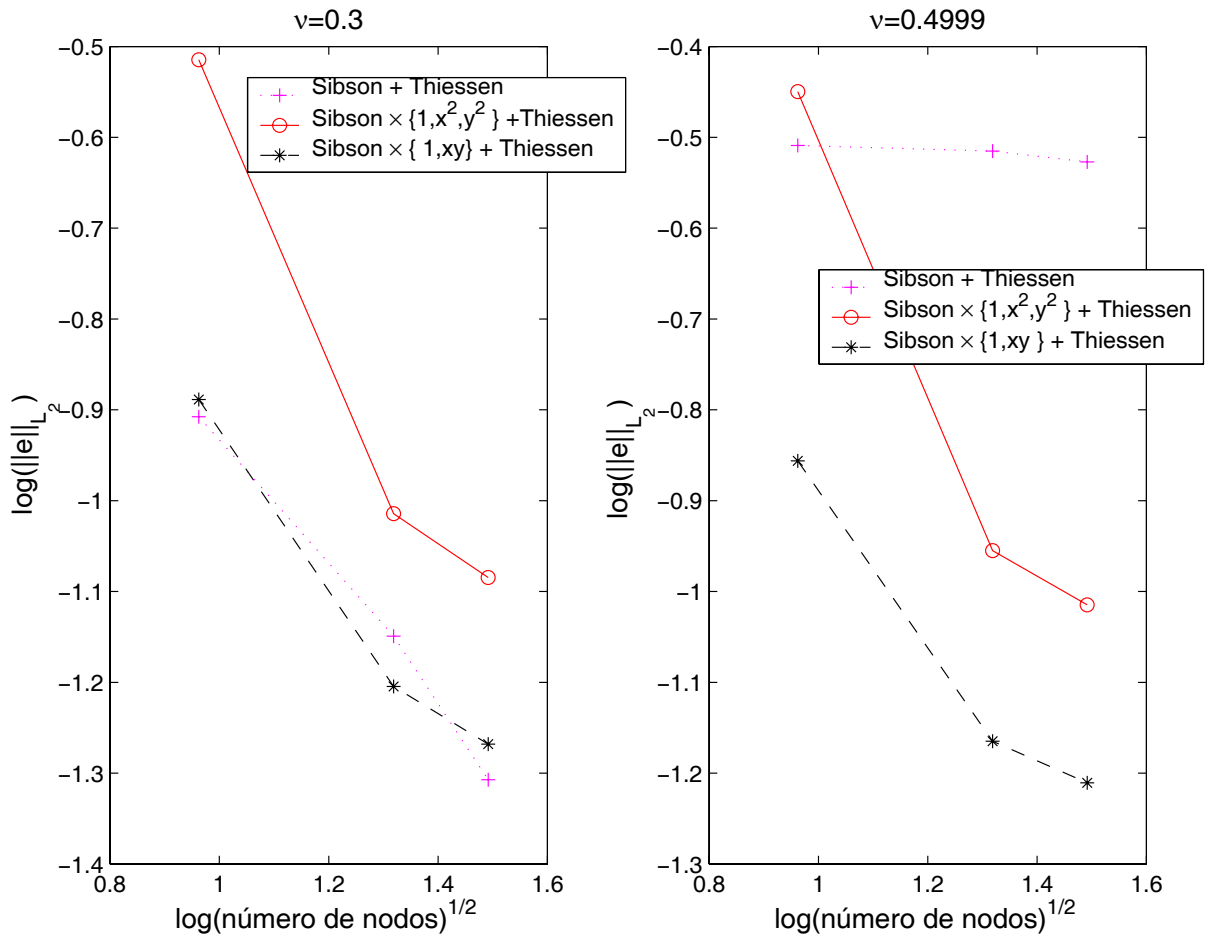


Figura 5.9: Resultados de convergencia para el problema de la placa con agujero. A la derecha, resultados con $\nu = 0,3$. a la izquierda, $\nu = 0,4999$.

la figura 5.8). En la figura 5.9 se muestra la convergencia de la norma L_2 del error con respecto a la solución teórica.

El problema se ha resuelto con una aproximación estándar de Sibson-Thiessen (sin enriquecimiento), que muestra claramente un bloqueo cuando $\nu = 0,4999$. Hay que hacer mención del buen comportamiento que muestra el enriquecimiento mediante $\{1, xy\}$, que muestra una buena convergencia en el caso casi-incompresible.

5.6 Conclusiones previas acerca del comportamiento del *MEN* en la simulación de medios incompresibles

En este capítulo se ha analizado el comportamiento de los interpolantes por vecinos naturales en su aplicación al desarrollo de aproximaciones mixtas para medios cercanos a la incompresibilidad. La aproximación mixta (usando interpolación de Sibson para los desplazamientos y Thiessen para las presiones), determina una formulación que no verifica la condición *inf-sup* bajo ciertas condiciones de contorno. De hecho, la aproximación se comporta de forma similar al Elemento Finito 4/1, descrito en otros estudios por BATHE [1996].

Para evitar este bloqueo se han considerado diversas aproximaciones enriquecidas en el campo de desplazamientos. El enriquecimiento se ha logrado haciendo uso del paradigma de la partición de la unidad (BABUŠKA Y MELENK [1996]). Se demuestra que un enriquecimiento que asegure la reproducción completa del polinomio bilineal en los desplazamientos parece verificar el test numérico de la condición *inf-sup*. Sin embargo, esta clase de enriquecimientos tiene deficiencias de rango en la matriz de rigidez resultante, y debe ser tratada con técnicas especiales de cálculo. En este caso, se ha usado una técnica de perturbación propuesta inicialmente por STROUBOULIS ET AL. [2001].

Entre los diferentes enriquecimientos, el conjunto $\{1, xy\}$ proporciona una formulación estable y no presenta dependencias lineales en el sistema de ecuaciones resultante. Esta formulación es parecida al elemento MINI propuesto por ARNOLD ET AL. [1984] (Elemento Finito triangular lineal con enriquecimiento burbuja y presiones discontinuas), muy utilizado en la literatura.

En el capítulo siguiente se explora la posibilidad de aplicación del *MEN* a la Dinámica de Fluidos.

UNA APROXIMACIÓN LAGRANGIANA ACTUALIZADA A LA DINÁMICA DE FLUIDOS

En este último capítulo de la tesis se estudia el método de los Elementos Naturales en su aplicación al estudio de fluidos newtonianos incompresibles gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes (o de Dinámica de Fluidos). En este estudio se utiliza una aproximación Lagrangiana del movimiento del fluido, al contrario que lo que generalmente se hace en la literatura donde se suele utilizar una filosofía Euleriana. A su vez, se hace uso del método de las características, que tal y como se comprueba más adelante, es una técnica muy apropiada para los métodos de Galerkin aplicados a la Dinámica de Fluidos, porque elimina el término convectivo de la ecuación de gobierno. Este tipo de aproximación es posible al utilizar una técnica Lagrangiana, de forma que los nudos del modelo se mueven, precisamente, sobre la trayectoria (o, lo que es lo mismo, sobre las líneas características del problema en cuestión). En el final del capítulo se presentan algunos ejemplos del comportamiento de esta técnica y su precisión al comparar los resultados obtenidos con soluciones analíticas o experimentales existentes en la literatura.

6.1 Descripción de la cinemática de un fluido

Se introducen a continuación los conceptos necesarios para una descripción matemática de los problemas de fluidos. Una consideración a tener en cuenta a la hora de simular problemas de fluidos mediante un método numérico es la elección

de una descripción cinemática apropiada del fluido. Los algoritmos de Mecánica de Medios Continuos utilizan generalmente tres tipos distintos de descripción del movimiento: la descripción Lagrangiana, Euleriana y la descripción *ALE*.

Definición 6.1.1 (Descripción Lagrangiana). Cada nodo de la nube de puntos que forma el dominio sigue a la partícula de material a la cual está asociado durante el movimiento, es decir, la nube de nodos computacional se mueve con el fluido. Este tipo de algoritmo es el que se ha utilizado en esta tesis para simular problemas de fluidos. Sin embargo, las aplicaciones clásicas de la descripción Lagrangiana suelen tener tradicionalmente problemas en su aplicación a casos de grandes deformaciones como la simulación de test de choques de vehículos. A menudo las soluciones numéricas están caracterizadas por poseer grandes desplazamientos y grandes deformaciones y se emplean relaciones dependientes de la historia del material para describir comportamientos de materiales elastoplásticos y viscoplásticos. La descripción Lagrangiana permite realizar un seguimiento muy exacto de superficies libres e interfaces entre distintos materiales.

Definición 6.1.2 (Descripción Euleriana). Es el más usado en la Mecánica de Fluidos. El dominio computacional es fijo y el fluido se mueve con respecto a éste. La formulación Euleriana tiene como un gran inconveniente la dificultad de seguir superficies libres e interfases entre dos materiales distintos o diferentes medios (por ejemplo, interfases fluido-fluido, o bien, fluido-sólido).

Definición 6.1.3 (Descripción Arbitrariamente Lagrangiana-Euleriana). Es particularmente útil en problemas de fluidos envueltos en grandes distorsiones con la presencia de contornos móviles y deformables. Los típicos ejemplos donde se utiliza esta técnica son los problemas que describen la interacción entre un fluido y una estructura flexible y la simulación de procesos de conformado de metales. La clave de la formulación *ALE* es la introducción de un dominio computacional (malla o nube de puntos) el cual se mueve con una velocidad independiente de la velocidad de las partículas del material, combinando así, a priori, las ventajas que proporcionan las dos técnicas anteriores.

Usualmente en Mecánica de Medios Continuos se utilizan dos dominios: El dominio material $R_{\mathbf{X}} \subset \mathbb{R}^n$, siendo n la dimensión espacial, compuesto por las partículas materiales \mathbf{X} , y el dominio espacial $R_{\mathbf{x}}$, compuesto por puntos espaciales \mathbf{x} .

El punto de vista Lagrangiano consiste, tal y como se ha comentado anteriormente, en el seguimiento de las partículas materiales del continuo en su movimiento a lo largo del tiempo. Para lograr este fin, se introduce una malla computacional (métodos con malla) o una nube de puntos (métodos sin malla) la cual sigue al continuo (el dominio) en su movimiento, estando los nodos permanentemente conectados a las mismas partículas materiales. Las coordenadas materiales \mathbf{X} corresponden a la configuración de referencia $R_{\mathbf{X}}$.

En una formulación Lagrangiana total, $R_{\mathbf{X}}$ se considera fijo y usualmente se corresponde con la configuración del continuo en el instante inicial. En una formulación Lagrangiana actualizada, la configuración de referencia cambia durante el cálculo y se corresponde generalmente con la configuración relativa al paso de tiempo anterior.

Definición 6.1.4. El movimiento de los puntos materiales relaciona las coordenadas materiales \mathbf{X} con las coordenadas espaciales \mathbf{x} . El movimiento está definido mediante una aplicación φ tal que

$$\begin{aligned} \varphi : R_{\mathbf{X}} \times [t_0, t_{\text{final}}) &\longrightarrow R_{\mathbf{x}} \times [t_0, t_{\text{final}}) \\ (\mathbf{X}, t) &\mapsto \varphi(\mathbf{X}, t) = (\mathbf{x}, t), \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

el cual permite relacionar \mathbf{X} y \mathbf{x} en el tiempo, mediante la ley de movimiento,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t),$$

la cual, a su vez, determina explícitamente la naturaleza de φ : en primer lugar, las coordenadas espaciales \mathbf{x} dependen tanto de las coordenadas materiales \mathbf{X} como del tiempo t , y en segundo lugar, el tiempo físico se mide a partir de la misma variable t en ambos dominios, tanto en el material como en el espacial. Para cualquier instante fijado t , la aplicación φ define una configuración del dominio espacial.

Para representar el gradiente de φ es conveniente emplear una representación matricial (DONEA Y HUERTA [2003]),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (\mathbf{X}, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{0}^T$ es un vector nulo y la velocidad material \mathbf{v} viene dada por

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}}, \tag{6.1.2}$$

siendo el significado de $\Big|_{\mathbf{X}}$ el mantener fijado \mathbf{X} .

Nota 6.1.1. Obviamente, la aplicación φ debe verificar que $\det(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}) > 0$ (distinto de cero para imponer una correspondencia uno a uno y positivo para evitar cambios de orientación en los ejes de referencia) en cada punto \mathbf{X} en un instante $t > t_0$. Esto permite seguir la historia del movimiento, e identificar en cualquier instante, mediante la transformación inversa $(\mathbf{X}, t) = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$, la posición inicial de la partícula material que ocupa la posición \mathbf{x} en el tiempo t .

Nota 6.1.2. Si los puntos materiales coinciden con los nodos computacionales durante el movimiento, no existen efectos convectivos en los cálculos Lagrangianos: la derivada material se reduce a una simple derivada en el tiempo.

6.1.1. Derivadas material y espacial en el tiempo

Para describir las derivadas en el tiempo en el dominio material y espacial, determinemos dos cantidades escalares $f(\mathbf{x}, t)$ y $f^{**}(\mathbf{X}, t)$ en los dominios espacial y material, respectivamente. Los asteriscos se emplean para resaltar que ambas cantidades son, en general, distintas (DONEA Y HUERTA [2003]). Para una partícula en movimiento, $f(\mathbf{x}, t)$ y $f^{**}(\mathbf{X}, t)$ están relacionados mediante,

$$f^{**}(\mathbf{X}, t) = f(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \quad \text{o bien} \quad f^{**} = f \circ \varphi.$$

El gradiente de esta expresión puede calcularse fácilmente como

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial(\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial f}{\partial(\mathbf{x}, t)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \varphi}{\partial(\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t),$$

quedando en forma matricial,

$$\left(\frac{\partial f^{**}}{\partial \mathbf{X}} \quad \frac{\partial f^{**}}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial f}{\partial t} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene tras la multiplicación matricial de la expresión anterior,

$$\left(\frac{\partial f^{**}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right), \quad (6.1.3)$$

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}. \quad (6.1.4)$$

La ecuación (6.1.4) relaciona las derivadas temporales materiales y espaciales.

Quitando los asteriscos para una notación más legible,

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla f, \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \frac{df}{dt} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla f, \quad (6.1.5)$$

la cual puede ser interpretada de la forma usual: la variación de una cantidad física para una partícula dada \mathbf{X} es la variación local más un término convectivo, teniendo en cuenta el movimiento relativo entre el sistema material y espacial.

Definición 6.1.5. Se denotará la derivada material temporal como

$$\frac{d \cdot}{dt} := \frac{\partial \cdot}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}},$$

y la derivada espacial temporal como

$$\frac{\partial \cdot}{\partial t} := \frac{\partial \cdot}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}.$$

6.2 Ecuaciones de gobierno de la Dinámica de Fluidos

Esta sección se ocupa del comportamiento de los fluidos viscosos e incompresibles gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes. Las ecuaciones que rigen el comportamiento de los fluidos compresibles e incompresibles son las ecuaciones de conservación básicas, cuya forma diferencial se presentan brevemente en esta sección: ecuación de conservación de masa y la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento. A la hora de modelar el comportamiento de un fluido viscoso e incompresible existen dos fuentes de dificultad numérica en el uso de un método de Galerkin estándar. La primera está relacionada con la incompresibilidad del fluido y se manifiesta cuando se emplea una inadecuada combinación de funciones de interpolación para la velocidad y la presión. Como consecuencia de esto, pueden aparecer inestabilidades en el campo de las presiones. La segunda fuente de dificultad numérica es debida a la presencia de términos convectivos no lineales en las ecuaciones de Navier-Stokes. De la primera de estas dificultades se ocupó el capítulo precedente, mientras que en este, mediante un tratamiento Lagrangiano de las ecuaciones, se intentará evitar los términos convectivos correspondientes.

6.2.1. Ecuaciones de conservación básicas

Ecuación de conservación de la masa.

La ley de conservación de la masa de un volumen material que varía V_t ocupado por un fluido viene dado por

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho dV = 0, \quad (6.2.1)$$

donde ρ representa la densidad del fluido.

Teorema 6.2.1 (Teorema de transporte de Reynolds). *Para funciones $f(\mathbf{x}, t)$ lo suficientemente suaves, se cumple que*

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_c \equiv V_t} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{S_c \equiv S_t} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (6.2.2)$$

donde V_t es el volumen material acotado por una superficie cerrada S_t , V_c es el volumen fijado en el espacio que coincide con el volumen de V_t en el instante considerado t , análogamente ocurre lo mismo con la definición de la superficie S_c , a su vez, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es la velocidad material de $\mathbf{x} \in S_t$.

Teniendo en cuenta el teorema anterior y la expresión (6.2.1), se obtiene que

$$0 = \frac{dM}{dt} = \int_{V_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV. \quad (6.2.3)$$

Esta relación es válida para cualquier elección que se tenga del volumen V_t , el integrando debe ser idénticamente cero. Por lo tanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (6.2.4)$$

en todos los puntos del fluido.

Definición 6.2.1. La ecuación (6.2.4) anterior, se denomina ecuación de continuidad.

Se puede obtener otra expresión de la misma, desarrollando el término de la divergencia y notando que dos de los términos que quedan forman juntos la definición de derivada material de la densidad, así

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (6.2.5)$$

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

Este principio relaciona la variación de la cantidad de movimiento de una determinada porción del fluido con la suma de todas las fuerzas que actúan sobre dicha porción. Para la porción de fluido de volumen V_t encerrada por la superficie material S_t , la cantidad de movimiento es

$$\int_{V_t} \rho \mathbf{v} dV$$

y aplicando el Teorema de transporte de Reynolds anterior (6.2.2), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} dV &= \int_{V_t} \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_{S_t} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \\ &= \int_{V_t} \left(\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) dV, \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

donde la notación $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ denota el tensor $[v_i v_j]$, con $i, j = 1, \dots, n$.

Haciendo uso de la ecuación (6.2.4) y la expresión (6.1.5) para la derivada material en el tiempo, la ecuación (6.2.6) anterior, se puede transformar en

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV, \tag{6.2.7}$$

la cual es simplemente la suma del producto de masa y aceleración para todos los elementos dV del volumen material V_t .

En general, una porción de fluido está sometida a fuerzas de volumen y de superficie.

Definición 6.2.2. Se denota por \mathbf{b} a la fuerza volumétrica por unidad de masa del fluido, así que la fuerza volumétrica total que actúa sobre una porción de fluido es

$$\int_{V_t} \rho \mathbf{b} dV.$$

Por otro lado, la i -ésima componente de la fuerza de superficie ejercida a lo largo de la superficie del área de dS y de normal \mathbf{n} viene dada por

$$\sigma_{ij} n_j dS,$$

así que la fuerza total ejercida sobre la porción de fluido considerada se puede ex-

presar en términos del tensor de tensiones de Cauchy mediante

$$\int_{S_t} \sigma_{ij} n_j dS = \int_{V_t} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV, \quad \text{o bien} \quad \int_{S_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_t} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (6.2.8)$$

El equilibrio de fuerzas para el volumen material de un fluido, se expresa entonces como

$$\int_{V_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{V_t} \rho \mathbf{b} dV + \int_{V_t} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (6.2.9)$$

Dicha relación integral es válida para todas las elecciones de volumen material V_t . Así

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (6.2.10)$$

para todos los puntos del fluido.

Haciendo uso de (6.1.5) se tiene también

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{o bien} \quad \frac{d\rho\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}). \quad (6.2.11)$$

6.2.2. Tensor de tensiones en un fluido Newtoniano

Proposición 6.2.2. *Dado un fluido general en reposo sólo están presentes las tensiones normales y el tensor de tensiones tiene la forma isótropa*

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij},$$

donde p es la presión del fluido estático y δ_{ij} la Delta de Kronecker.

Proposición 6.2.3. *La situación de un fluido en movimiento es diferente. En ese caso, generalmente, las tensiones tangenciales no son nulas, y la componente normal de la tensión actuando a lo largo de la superficie depende de la dirección de la normal de ésta.*

La cantidad $-\frac{1}{3}\sigma_{ii}$ (suma en i), la cual es invariante bajo rotaciones de los ejes de referencia y reduce la presión estática del fluido cuando el fluido está en reposo, se usa para definir la presión en un punto de un fluido en movimiento:

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii}.$$

Es conveniente entonces descomponer el tensor de tensiones de Cauchy σ_{ij} en suma de una parte isótropa $-p\delta_{ij}$ y el resto en una parte no isótropa s_{ij} , el tensor

de tensiones desviadoras se define como:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}$$

Proposición 6.2.4. *Para un fluido Newtoniano, se supone que el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones están linealmente relacionados. Esta relación tensión-deformación viene dada por*

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}, \quad (6.2.12)$$

donde μ es la viscosidad dinámica del fluido y λ el denominado segundo coeficiente de viscosidad. Para fluidos incompresibles se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ y consecuentemente la relación anterior (6.2.12), se reduce a la conocida como Ley de Stokes

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = -p\delta_{ij} + 2\mu v_{(i,j)} \quad (6.2.13)$$

y, escrita en una forma un poco más compacta,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\nabla^s \mathbf{v}. \quad (6.2.14)$$

6.2.3. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen un importante número de fenómenos en la mecánica de fluidos. En un fluido Newtoniano existen efectos dinámicos debidos a la presencia de fuerzas exteriores aplicadas y fuerzas internas del fluido. Las fuerzas internas son debidas a la presión del fluido y la viscosidad de éste.

Proposición 6.2.5. *Si se considera un fluido determinado por una región $\Omega \in \mathbb{R}^n$, donde $n = 2$ ó 3 . El dominio Ω ocupado por dicho fluido se supondrá acotado (de tamaño finito). El contorno $\Gamma = \partial\Omega$ del fluido se supone Lipschitziano y continuo, es decir, está cerrado y es una superficie lo suficientemente regular. Con ello, el flujo dependiente del tiempo de un fluido incompresible y viscoso está gobernado por la siguiente ecuación de la cantidad de movimiento y de la ecuación de conservación de la masa, denominadas ecuaciones de Navier-Stokes:*

$$\rho(\mathbf{v}_{,t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (6.2.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (6.2.16)$$

donde ρ es la densidad del fluido y \mathbf{b} son las fuerzas volumétricas por unidad de masa del fluido.

Teniendo en cuenta la Ley de Stokes anterior, (6.2.14), la ecuación del movimiento (6.2.15) se puede expresar como

$$\mathbf{v}_{,t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - 2\nu\nabla \cdot \nabla^s \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{b}, \quad (6.2.17)$$

donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática del fluido y p la presión cinemática, definida como la presión dividida por la densidad del fluido. Usualmente la ecuación anterior se suele reescribir como

$$\mathbf{v}_{,t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nu\nabla^2 \mathbf{v} - \nu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{b}. \quad (6.2.18)$$

que es la divergencia de tensiones en velocidades y presiones.

La condición de incompresibilidad anterior (6.2.16), es una consecuencia directa de que en un medio incompresible la variación de la densidad de la masa a lo largo del movimiento es nula.

Proposición 6.2.6. *Bajo esta condición de incompresibilidad (6.2.16), la variación de cantidad de movimiento (6.2.15), o (6.2.18), puede transformarse en*

$$\mathbf{v}_{,t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nu\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{b}, \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (6.2.19)$$

El problema de Navier-Stokes se debe completar con unas condiciones de contorno e iniciales adecuadas para componer un problema de valor inicial en el contorno. Las condiciones de contorno típicas consisten en valores prescritos de la velocidad \mathbf{v}_D sobre una porción del contorno Γ_D (condiciones Dirichlet):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_D(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad t \in (0, T), \quad (6.2.20)$$

y condiciones Neuman en otra parte del contorno Γ_N :

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad t \in (0, T). \quad (6.2.21)$$

donde el vector \mathbf{n} denota la normal exterior al contorno.

6.3 Método de las características

En esta sección se presentan las propiedades básicas de las ecuaciones de convección con un énfasis especial en el papel que juegan las características en su solución. La idea es utilizar el método de los elementos naturales para producir soluciones de los problemas de dinámica de fluidos a través de un uso directo del método de las características. En toda la sección se sigue fielmente el desarrollo de DONEA Y HUERTA [2003].

6.3.1. El concepto de línea característica

Para las ecuaciones de primer orden, tales como las ecuaciones de convección anteriores, el prototipo de ecuación diferencial lineal (EDP) es de la forma

$$u_t + au_x = s, \tag{6.3.1}$$

donde a y s pueden depender de x y de t . Se puede interpretar estos tipos de ecuaciones como: para una solución dada $u(x, t)$ y dado un punto en el espacio en un tiempo determinado (x, t) , la derivada total de u con respecto al tiempo en la dirección definida por la pendiente

$$\frac{dx}{dt} = a$$

es igual a s . De esta forma se ha introducido el concepto de propagación de la información u , con una velocidad a , como una función del punto considerado (x, t) .

Definición 6.3.1. Cuando las EDPs envuelven el concepto físico de propagación se denominan hiperbólicas y la dirección definida por $\frac{dx}{dt} = a$ se denomina dirección característica. Se tiene como resultado inmediato que cualquier EDP de primer orden es hiperbólica. Si la EDP es lineal, las curvas características están fijadas en el plano (x, t) , independientemente de la solución $u(x, t)$. Más aún, si la EDP lineal tiene además coeficientes constantes, las características son líneas rectas.

Para ilustrar de una forma más fácil el concepto de transporte típico de una EDP de primer orden, considérese una ecuación homogénea de la forma (6.3.1), con a constante. Aplicando un cambio de variables,

$$\xi = x - at, \quad \text{y} \quad \eta = x + at,$$

se tiene la siguiente transformación

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi \\ u_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi \\ u_\eta \end{pmatrix}.$$

Así la EDP $u_t + au_x = 0$ queda

$$2au_\eta = 0,$$

cuya solución general es

$$u = f(\xi) = f(x - at),$$

donde f es una función arbitraria.

Proposición 6.3.1. *La solución $u(x, t)$ en el punto x en el tiempo t es igual a la solución en el tiempo $t - \Delta t$ en el punto $x - a\Delta t$:*

$$u(x, t) = u(x - a\Delta t, t - \Delta t). \quad (6.3.2)$$

En otras palabras, la solución es un transporte en el tiempo del perfil espacial de u . Por esta razón, la ecuación (6.3.1) se conoce con el nombre de ecuación de transporte.

6.3.2. Propiedades de la ecuación de convección lineal

Para proporcionar una base para la discusión de los algoritmos basados en el método de los elementos naturales aplicando el método de las características, es necesario tratar unas propiedades matemáticas básicas de la ecuación de convección transitoria.

Considérese en primer lugar el caso de una cantidad escalar u transportada por un campo de velocidades de convección dado $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ con la presencia de un término fuente conocido $s(\mathbf{x}, t)$. El problema de valores en el contorno para la cantidad u se supone lineal y se define como

$$u_t + (\mathbf{a} \cdot \nabla)u = s, \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (6.3.3)$$

con un campo de convección $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ variable en el espacio y el tiempo.

Como se ha visto anteriormente, la solución analítica de este problema de valor inicial en el contorno en un punto dado en el espacio y en el tiempo, se puede determinar con la ayuda del concepto de líneas características asociadas con el campo

de velocidades $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$. La idea es reemplazar el operador $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla$ en el miembro de la izquierda de la ecuación (6.3.3) anterior, el cual representa la derivada material en una descripción Euleriana, por una derivada en el tiempo usando el punto de vista Lagrangiano.

De acuerdo con ello, para un punto dado en el espacio y en el tiempo (\mathbf{x}, τ) donde $\mathbf{x} \in \Omega$ y $\tau \in (0, T)$, se determina la línea característica $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau; t)$ pasando a través del punto considerado resolviendo la ecuación (vectorial) diferencial

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(\mathbf{x}, \tau; t) = \mathbf{a}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau; t)), \quad t \in (0, T), \quad (6.3.4)$$

sujeta a la condición

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau; \tau) = \mathbf{x}. \quad (6.3.5)$$

Desde un punto de vista Lagrangiano, $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau; t)$ se puede interpretar, teniendo en cuenta la posición en el tiempo t de la partícula de un fluido transportada por el campo de velocidad de convección \mathbf{a} , la cual ocupa la posición espacial \mathbf{x} en el tiempo τ . En otras palabras, (6.3.4) define la trayectoria de la partícula.

Definición 6.3.2. A lo largo de esta trayectoria, la derivada material (o total) es

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u,$$

la cual es el miembro izquierdo de la ecuación de convección (6.3.3), reducida a una derivada en el tiempo. De hecho, por definición, la derivada material es la variación en el tiempo detectada por un observador que se mueve con las partículas del material.

6.3.3. Métodos de Lagrange-Galerkin basados en las características

En este apartado se presenta brevemente el método de los elementos naturales aprovechando el método de las características para resolver la ecuación de convección, (6.3.3). Los métodos de Lagrange-Galerkin aprovechan la propiedad de solución constante a lo largo de la trayectoria de la partícula de un fluido para aproximar la derivada total del miembro izquierdo de la ecuación (6.3.3). La trayectoria de la partícula coincide con la curva característica asociada y está definida por las ecuaciones (6.3.4) y (6.3.5). Los métodos Lagrange-Galerkin están específicamente

adaptados al uso de una discretización del dominio basada sobre una proyección Galerkin.

Formulación variacional característica

Debido a que la solución de los problemas de convección permanece constante a lo largo de la ruta de la partícula del fluido, se puede aprovechar en una formulación variacional. Esta formulación débil se desarrolla en la siguiente sección que se presenta a continuación.

6.4 Formulación débil. Uso de una técnica de Elementos Naturales y Características.

Proposición 6.4.1. *Considérese un fluido Newtoniano (por tanto, de viscosidad constante), incompresible y sometido a efectos dinámicos. Las ecuaciones que rigen el modelo de flujo resultan:*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} \right), \quad (6.4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.4.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\eta \nabla^s \mathbf{v} = -p\mathbf{I} + \mathbf{s}. \quad (6.4.3)$$

Si se introduce la expresión del tensor de tensiones (6.4.3) en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (6.4.1) se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes, que se pueden expresar como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla p + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (6.4.4)$$

la cual se debe resolver junto con la ecuación de conservación de la masa, la condición de incompresibilidad (6.4.2).

Proposición 6.4.2. *La formulación variacional asociada a las ecuaciones (6.4.4) y (6.4.2) es la siguiente:*

$$\int_{\Omega} 2\eta \mathbf{D} : \mathbf{D}^* d\Omega - \int_{\Omega} p\mathbf{I} : \mathbf{D}^* d\Omega = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \mathbf{v}^* d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v}^* d\Omega, \quad (6.4.5)$$

y

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} p^* d\Omega = 0. \quad (6.4.6)$$

donde se tiene que las variables \mathbf{v}^* y p^* son las velocidades y presiones de ponderación, respectivamente. El tensor $\mathbf{D} = \nabla^s \mathbf{v}$ representa el tensor velocidad de deformación y \mathbf{b} es el vector de fuerzas volumétricas.

El segundo término del miembro de la derecha de la ecuación anterior (6.4.5), es el término que recoge los efectos dinámicos, es decir, la inercia. La discretización de este término es una discretización de la derivada material a lo largo de las trayectorias —método de las características— suponiendo que lo que se busca es calcular la solución en el instante $t^n = n\Delta t$, supuesta conocida la cinemática en el instante anterior $t^{n-1} = (n-1)\Delta t$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v}^* d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{v}^n(\mathbf{x}) - \mathbf{v}^{n-1}(\mathbf{X})}{\Delta t} \mathbf{v}^* d\Omega, \quad (6.4.7)$$

donde \mathbf{X} representa la posición que en el instante t^{n-1} ocupaba la partícula que actualmente ocupa la posición \mathbf{x} , es decir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{v}^{n-1}(\mathbf{X})\Delta t. \quad (6.4.8)$$

Se tiene de este modo que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2\eta \mathbf{D} : \mathbf{D}^* d\Omega - \int_{\Omega} p \mathbf{I} : \mathbf{D}^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^*}{\Delta t} d\Omega = \\ = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \mathbf{v}^* d\Omega - \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{v}_0^{n-1} \mathbf{v}^*}{\Delta t} d\Omega, \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

y

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} p^* d\Omega = 0. \quad (6.4.10)$$

6.5 Aspectos algorítmicos

El término de más difícil evaluación en la ecuación (6.4.9) es, sin duda, el segundo del miembro derecho de la igualdad. Si se emplean cuadraturas basadas en el uso de puntos de Gauss para la integración numérica, será necesario determinar la posición en el instante t^{n-1} del punto que en el instante t^n ocupa la posición del punto de integración, es decir:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{v}_0^{n-1} \mathbf{v}^*}{\Delta t} d\Omega = \sum_k \rho \frac{\mathbf{v}^{n-1}(\Xi_k) \mathbf{v}^*(\xi_k)}{\Delta t} \omega_k, \quad (6.5.1)$$

donde ω_k son los pesos asociados a los puntos de cuadratura ξ_k , y Ξ_k corresponde a la posición que ocupaban en el tiempo t^{n-1} los puntos de cuadratura ξ_k .

Un aspecto fundamental en la implementación de este algoritmo consiste en la evaluación del término $\mathbf{v}^{n-1}(\Xi_k)$, es decir, el cálculo de la velocidad que en el instante $(n-1)\Delta t$ había en el punto que en el instante $n\Delta t$ es un punto de Gauss.

Por el contrario, si se utiliza alguna técnica de integración nodal como la explicada en el capítulo 4, este término se corresponde con la velocidad nodal en el instante $n-1$, que puede ser almacenada fácilmente de un instante de tiempo a otro con mínimo coste computacional.

Pero si se utiliza un método de integración sobre los triángulos de Delaunay, la posición que ocupaba en el instante $n-1$ el punto que en el instante n es un punto de integración debe ser determinada iterativamente. Una posibilidad para la realización de este cálculo es la siguiente: procediendo iterativamente hasta que $\mathbf{X}_k^i \approx \mathbf{X}_k^{i-1}$,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{X}_k^i + \mathbf{v}^{n-1}(\mathbf{X}_k^{i-1})\Delta t, \quad \text{con } \mathbf{x}_k = \mathbf{X}_k^0.$$

Este procedimiento ha proporcionado tasas de convergencia razonables, alcanzándose el nivel de error deseado (usualmente $\mathcal{O}(10^{-8})$) en 2 ó 3 iteraciones.

Otro problema relacionado con éste radica en el almacenamiento de la conectividad nodal en el instante $n-1$. Como es claro, no resulta práctico —la mayoría de los códigos de Elementos Finitos no están preparados para ello— ni computacionalmente rentable, almacenar la conectividad y la configuración nodales en el instante de tiempo $n-1$. Para evitar esto, se ha supuesto que

- (i) La conectividad nodal no cambia entre instantes de tiempo sucesivos. Aunque, como es bien sabido, esta suposición dista de ser cierta, los vecinos naturales de un punto no variarán apreciablemente —aunque lo haga la triangulación de Delaunay— si el Δt es lo suficientemente pequeño.
- (ii) Sí cambia la configuración nodal. Para obtener la configuración nodal en el instante $n-1$ basta con almacenar en cada nodo el valor de la velocidad \mathbf{v}^{n-1} . La mayoría de los códigos de Elementos Finitos comerciales (y, por descontado, el código *Mydas*) permiten realizar este almacenamiento. El valor de la configuración en el instante $n-1$ se obtiene entonces como:

$$\mathbf{X}^{n-1} = \mathbf{X}^n - \mathbf{v}^{n-1}(\mathbf{X}^{n-1})\Delta t$$

Este simple algoritmo ha mostrado excelentes resultados, a la vez que permite

un importante ahorro computacional.

6.6 Resultados numéricos

Para poder validar la técnica presentada a lo largo de este capítulo, se muestran a continuación tres ejemplos de simulación. En el primero de ellos, el conocido como “problema de la presa rota”, se comparan los resultados obtenidos numéricamente con resultados experimentales recogidos por MARTIN Y MOYCE [1952]. El segundo ejemplo, sobre la formación de una ola en un fluido, se analiza junto a la solución analítica del problema. Por último, el tercer ejemplo recoge el análisis del avance de una burbuja en el seno de un fluido para ilustrar la potencial aplicación de este método a problemas con dos fases.

6.6.1. Problema de la presa rota

Este es un ejemplo clásico en la dinámica de fluidos tratada con métodos sin malla (véase, por ejemplo, BONET Y LOK [1999], RAMASWAMY Y KAWAHARA [1987], LEWIS ET AL. [1997], RABIER Y MEDALE [2003]). Se trata de una columna rectangular de agua, en equilibrio hidroestático, confinada entre paredes verticales y una puerta, tal y como se muestra en la figura 6.1.

La columna de agua tiene 0.05715 m. de altura y 0.05715 de anchura. En el instante inicial $t = 0$, se hace desaparecer instantáneamente la puerta y se permite que el agua fluya bajo los efectos de la aceleración de la gravedad. Se consideran condiciones de deslizamiento libre en las paredes del contorno. Se considera una aceleración gravitacional de 9.81 m/s^2 actuando verticalmente y en el sentido negativo del eje. La densidad del agua considerada es de 10^3 kg/m^3 , y una viscosidad de $0.1 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$. El modelo matemático está compuesto por 3364 nodos.

La figura 6.2 muestra una comparación de los resultados numéricos obtenidos frente a los datos experimentales que ofrecen MARTIN Y MOYCE [1952]. Todas las variables que se muestran en la figura 6.2 son adimensionales, teniendo en cuenta la anchura de la columna en el instante inicial a , el eje de abscisas es un tiempo adimensional que viene definido por la expresión $t\sqrt{g/a}$, donde g es la aceleración de la gravedad, y el eje de ordenadas viene definido por la expresión z/a donde z es la posición del frente del fluido. Los resultados experimentales presentados son una media de varios experimentos del problema que realizan MARTIN Y MOYCE [1952]. En la figura 6.3 se muestra el comportamiento del fluido en uno de los experimentos

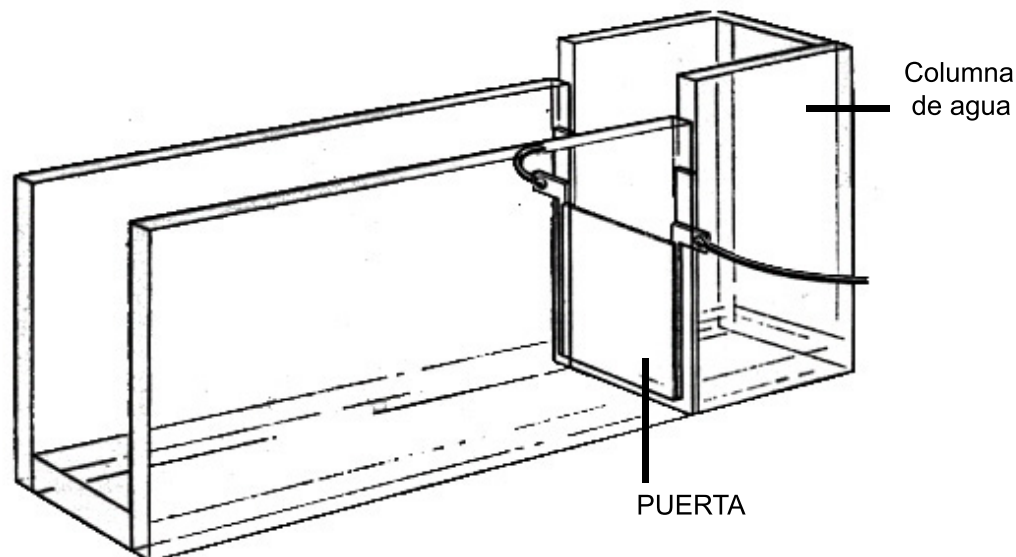


Figura 6.1: Configuración experimental del ensayo de rotura de presa. (Elaboración propia a partir de MARTIN Y MOYCE [1952])

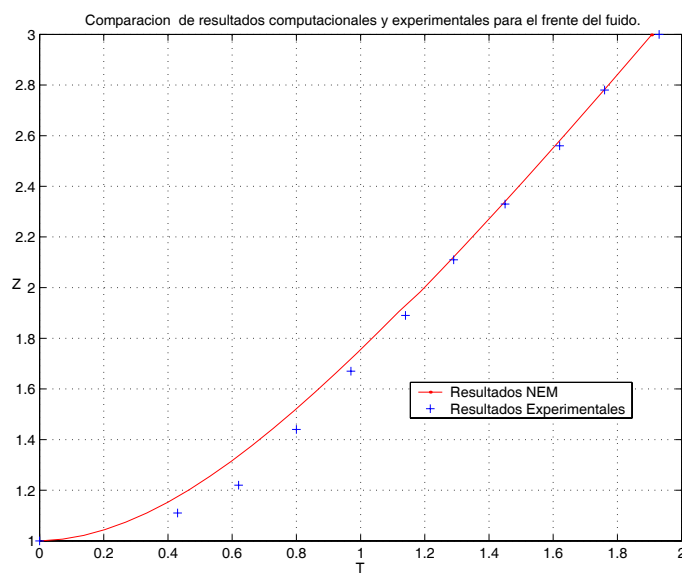


Figura 6.2: Resultados del problema de rotura de presa.

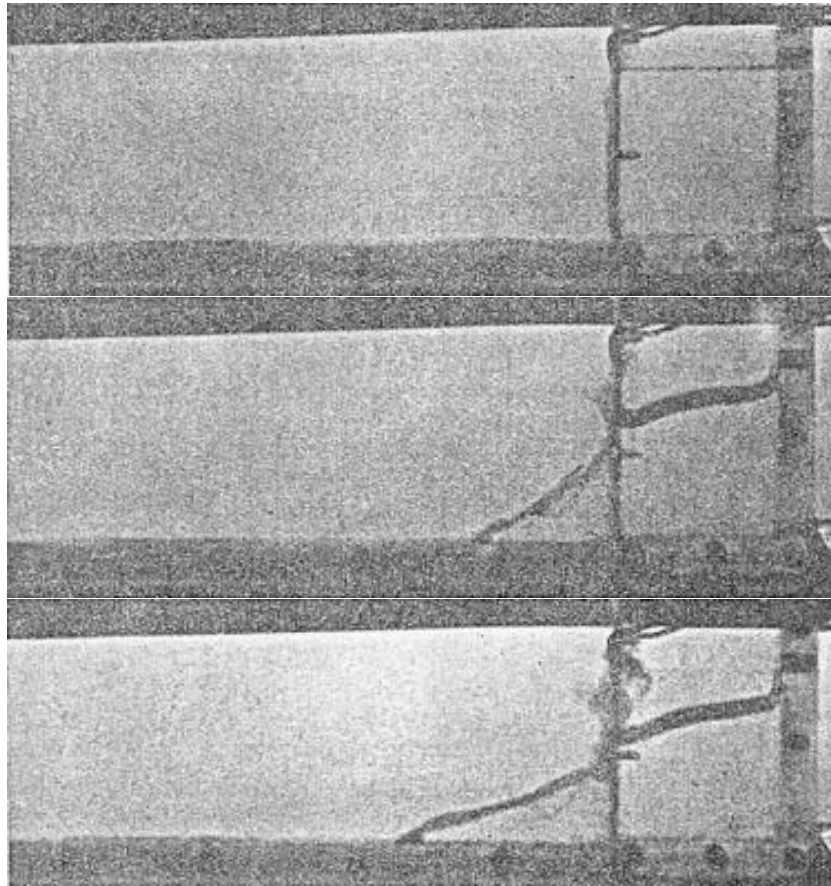


Figura 6.3: Colapso bidimensional de una columna de agua (tomado de MARTIN Y MOYCE [1952]).

realizados por MARTIN Y MOYCE [1952], mientras que en la figura 6.4 se presentan la distribución de los nodos que se obtienen de la simulación por elementos naturales comentada anteriormente.

En las gráficas 6.5 y 6.6 se puede observar el error de conservación del volumen que se comete en la simulación. En la primera de ellas se muestra el error absoluto que se comete frente al valor teórico, mientras que en la segunda se muestra el error relativo. Se puede observar que es menor del 3% en todo instante de tiempo.

En la figura 6.7 se muestra el campo de velocidades. Hay que tener en cuenta que cada vector representa la velocidad y dirección que toma cada uno de los nodos y que el módulo de dichos vectores es dependiente al valor de todos los demás vec-

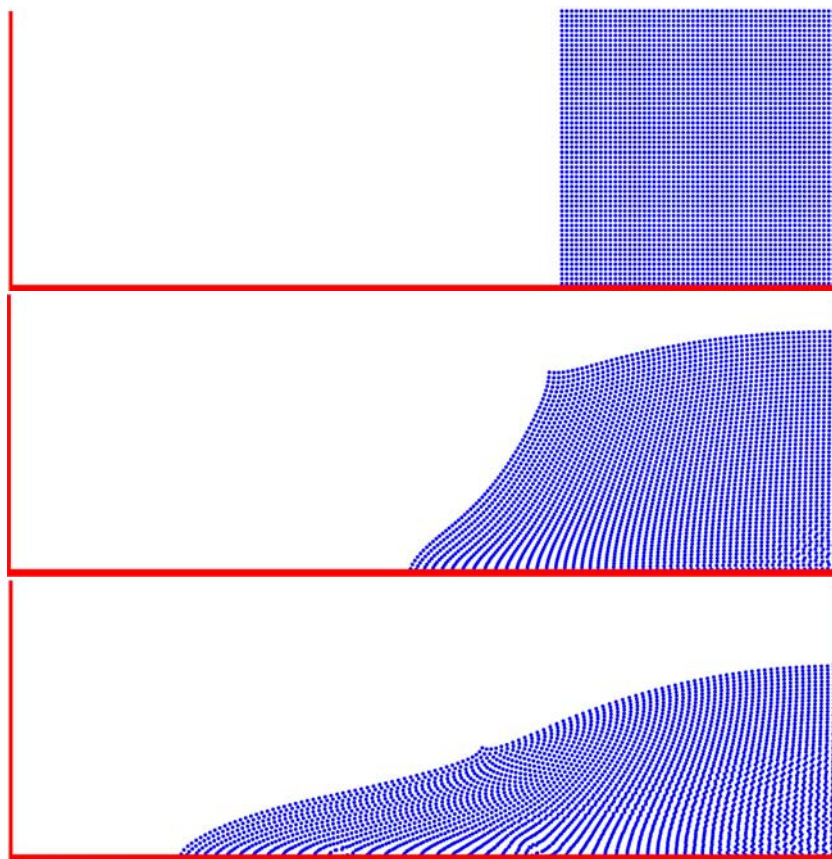


Figura 6.4: Simulación del colapso bidimensional de una columna de agua.

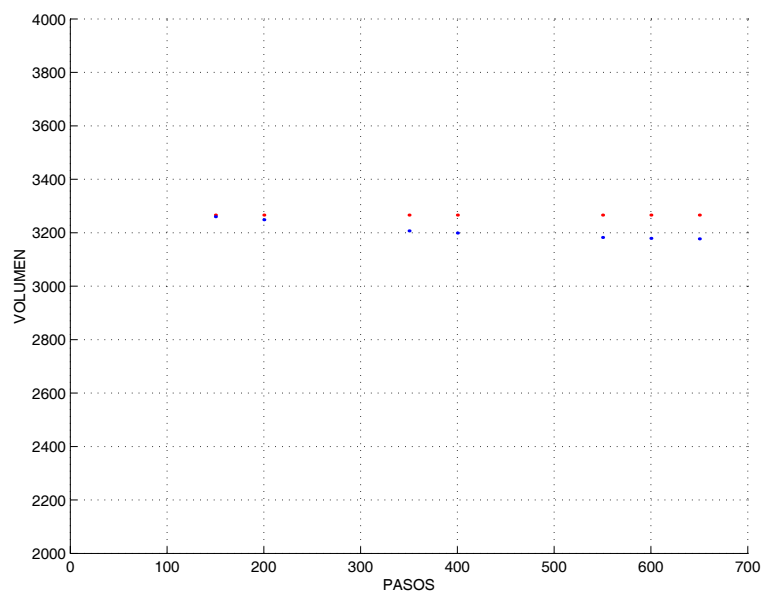


Figura 6.5: Error absoluto del volumen total del fluido.

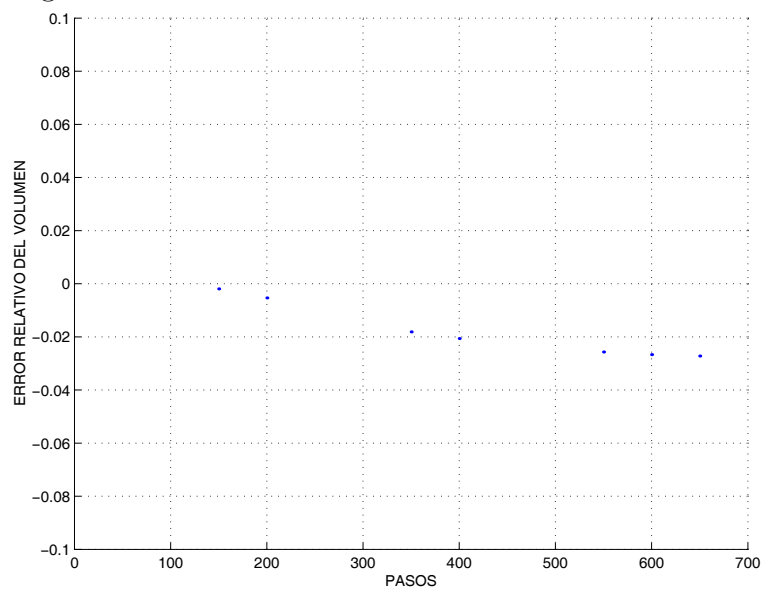


Figura 6.6: Error relativo del volumen total del fluido.

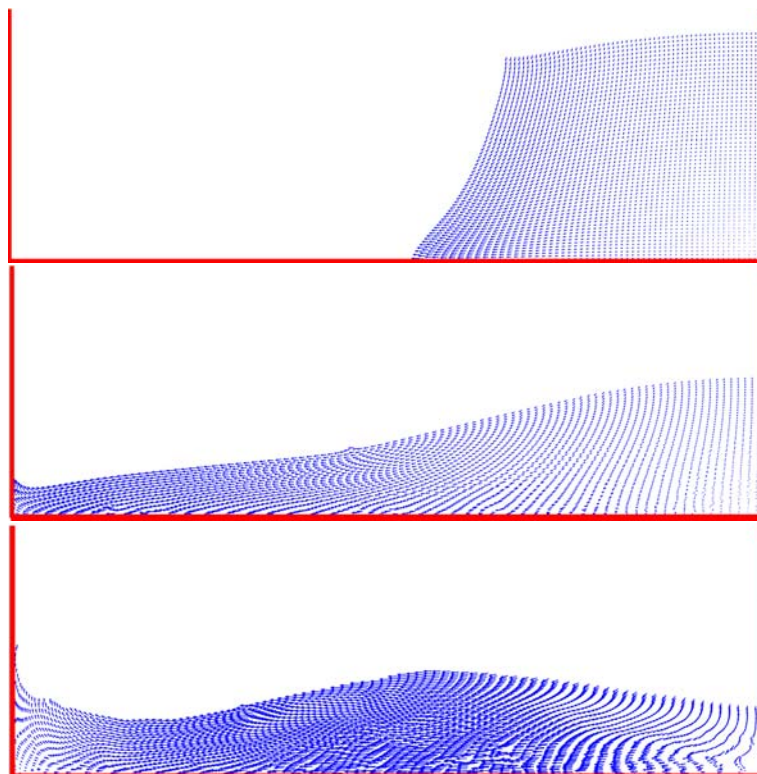


Figura 6.7: Campo de velocidades de la simulación del colapso bidimensional de una columna de agua.

tores de los nodos.

Por último, en la figura 6.8 se muestra la triangulación de Delaunay que se obtiene con una forma $\alpha = 5.0$. Obsérvese la dificultad que se tendría al realizar esta simulación mediante el método de los Elementos Finitos debido a la forma y tamaño de algunos de los elementos que aparecen.

6.6.2. Análisis de la propagación de una onda solitaria

En el diseño de estructuras cercanas a la costa como pudieran ser rompeolas, espigones, etc, tiene una gran importancia el análisis de la propagación de una onda solitaria. Ya en 1834, John Scott Russell estudió el fenómeno de una onda solitaria viajando en un canal rectangular son una profundidad uniforme, definiendo también la onda solitaria como una elevación sobre un nivel de agua inferior y en un estado

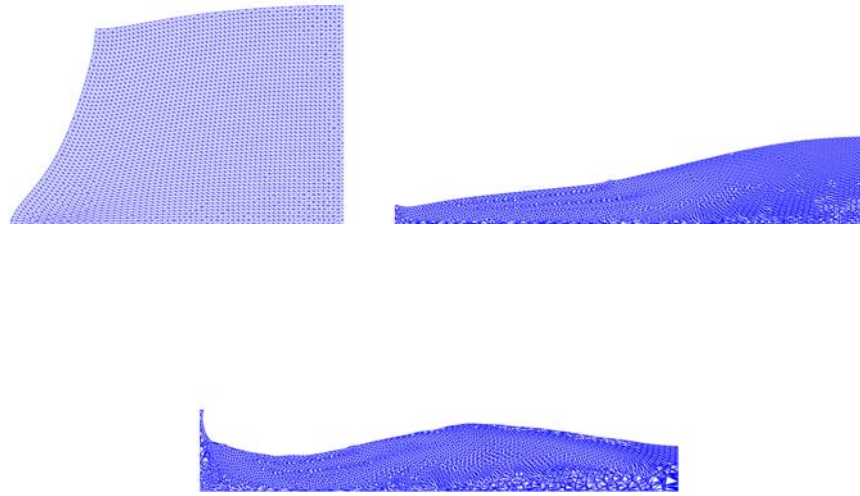


Figura 6.8: Formas α en la simulación del colapso bidimensional de una columna de agua.

estable (es decir, no se encuentra seguida ni precedida por alguna otra elevación o depresión de la superficie) produciendo un transporte dirigido en la dirección de la propagación de la onda, donde solamente viaja la onda sin cambio alguno en la forma y con una velocidad esencialmente constante durante todo el tiempo de observación de dicho viaje.

Se han llevado a cabo diversos estudios analíticos del comportamiento de este problema. Cabe destacar como fruto de estas investigaciones las aproximaciones a la solución del problema debidas a LAITONE [1960], que son usadas frecuentemente en estudios comparativos de este tipo.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de la propagación de una onda solitaria son las siguientes:

$$u_1 = \sqrt{gd} \frac{H}{d} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right] \quad (6.6.1)$$

$$u_2 = \sqrt{3gd} \left(\frac{H}{d} \right)^{3/2} \left(\frac{y}{d} \right) \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right] \tanh \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right] \quad (6.6.2)$$

$$\eta = d + H \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right] \quad (6.6.3)$$

$$c = \sqrt{gd \left(1 + \frac{H}{d} \right)} \quad (6.6.4)$$

en las cuales H y d son la altura inicial de la onda y la profundidad del agua con velocidad esencialmente nula, respectivamente. u_1 y u_2 representan, respectivamente, la velocidad horizontal y vertical y η representa la altura de la cresta en el instante inicial para cada punto de la superficie.

En teoría, las fórmulas de Laitone son válidas únicamente para un canal de longitud infinita, pero debido a que los cálculos deben hacerse en un dominio finito y el fluido situado a una distancia de la cresta de la onda está esencialmente quieto, es conveniente definir un dominio finito y una longitud práctica para el estudio de la onda solitaria. La principal consideración es que las dos paredes verticales que constituyen el contorno del dominio en estudio deben estar lo suficientemente lejos de la cresta inicial de la onda, así el movimiento de la onda solitaria en el fluido con una velocidad esencialmente nula cercano a una pared vertical puede ser claramente aproximado. Para dicho propósito, la longitud de la onda efectiva L se obtiene tomando $L/2$ igual a la distancia de la cresta de la onda a la sección donde $\eta = 0.01 H$, acorde a la fórmula de Laitone (RAMASWAMY [1990]). Así

$$\frac{L}{d} = 6,90 \left(\frac{d}{H} \right)^{1/2} \quad (6.6.5)$$

Tomando $H/d = 0.2$, el valor de $L/2$ viene dado por $8d$ debido a la ecuación (6.6.5). De tal modo que las paredes verticales del dominio están situadas a $16d$ de la cresta inicial. El diagrama que refleja el problema de la onda solitaria se muestra en la figura 6.9, y la condición inicial para este problema está reflejada en la figura 6.10. La profundidad del fluido con velocidad esencialmente nula es de 10 unidades, la altura de la onda H es de 2.0 unidades, y la longitud horizontal del canal es de $16d = 160.0$ unidades. Para el cálculo, se supone que la densidad es constante y se toma como aceleración de la gravedad $g = 9.81$ unidades y un incremento de tiempo de $\Delta t = 0.01$ unidades de tiempo. Comenzando a partir de la condición inicial, se puede calcular el desarrollo de la onda solitaria.

La altura que la onda solitaria llega a alcanzar en la pared vertical R se puede obtener a partir de una aproximación de Laitone (RAMASWAMY [1990]):

$$\frac{R}{d} = 2 \left(\frac{H}{d} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{d} \right)^2. \quad (6.6.6)$$

Con $H/d = 0.2$, R es 4.2 unidades en este cálculo de la aproximación teórica que proponen las fórmulas de Laitone, mientras los resultados numéricos obtenidos mediante el uso de la técnica de aproximación Lagrangiana actualizada mediante el método de los Elementos Naturales es de $R = 4.2025$ unidades, véase la figura 6.12.

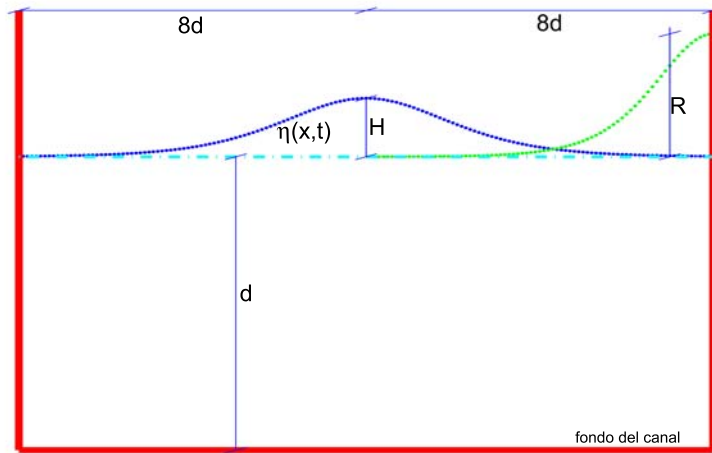


Figura 6.9: Definición del problema para la propagación de una onda solitaria.

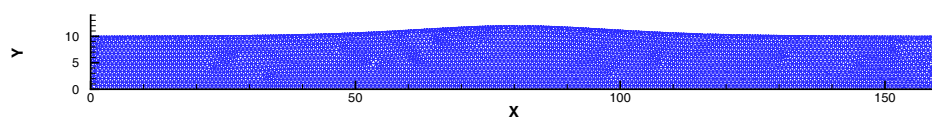
Los resultados previos existentes en la literatura (RAMASWAMY [1990]) no muestran sin embargo tanta precisión, quedando de manifiesto la capacidad de adaptación del método de los Elementos Naturales a distintas disciplinas.

En las figuras 6.13 (a) a (c) se muestra el campo de velocidades para los instantes de tiempo mencionados anteriormente.

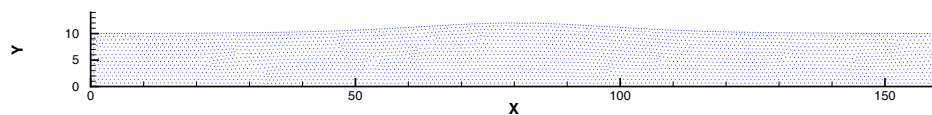
6.6.3. Simulación del movimiento de una burbuja en el seno de un fluido viscoso

En este ejemplo se analiza la simulación del movimiento de una burbuja inmersa en el seno de un fluido viscoso. Este problema posee solución analítica para el caso de un fluido infinito y fue obtenida por primera vez por HADAMARD [1911]. En este caso se utilizará para estudiar la validez del método aquí propuesto para la simulación de flujos bifásicos.

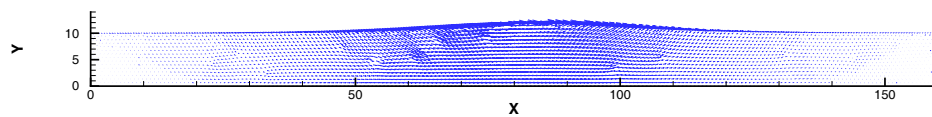
En el método de los elementos finitos la simulación de flujos bifásicos exige un remallado continuo que permita seguir la evolución de la interfaz entre los dos fluidos. En trabajos más recientes (como, por ejemplo, el de CHESSA Y BELYTSCHKO [2003]) se ha analizado el uso del método de los elementos finitos extendidos para la simulación de este tipo de flujos. En este caso se han utilizado técnicas de tipo *level set* para el seguimiento de la interfaz, que evoluciona sobre una malla fija. El uso de este tipo de técnicas conlleva otra serie de dificultades, como pueden ser la necesidad de la re-inicialización de la función *level set* a lo largo de la simulación



(a)

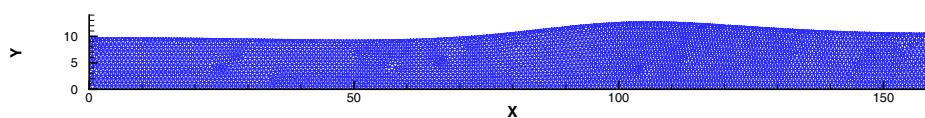


(b)

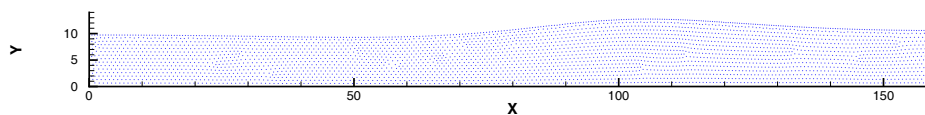


(c)

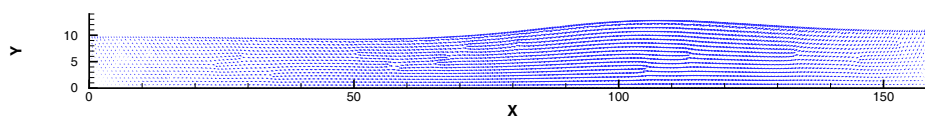
Figura 6.10: Configuración inicial del problema de propagación de una onda solitaria. Se muestra la Forma α (a), la distribución de los nodos (b) y el campo de velocidades (c).



(a)

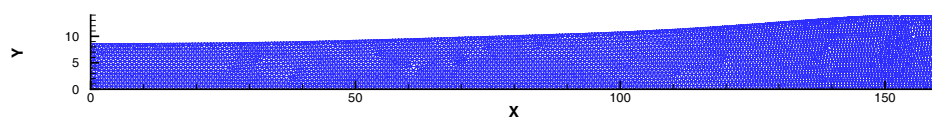


(b)

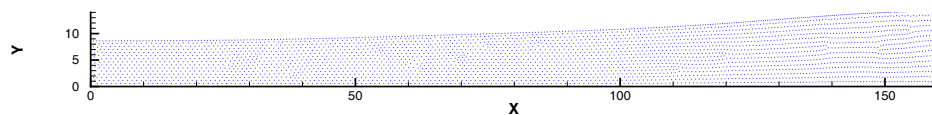


(c)

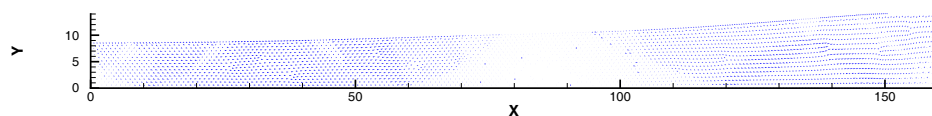
Figura 6.11: Resultados calculados en el paso de tiempo número 15. Se muestra la Forma α (a), la distribución de los nodos (b) y el campo de velocidades (c).



(a)

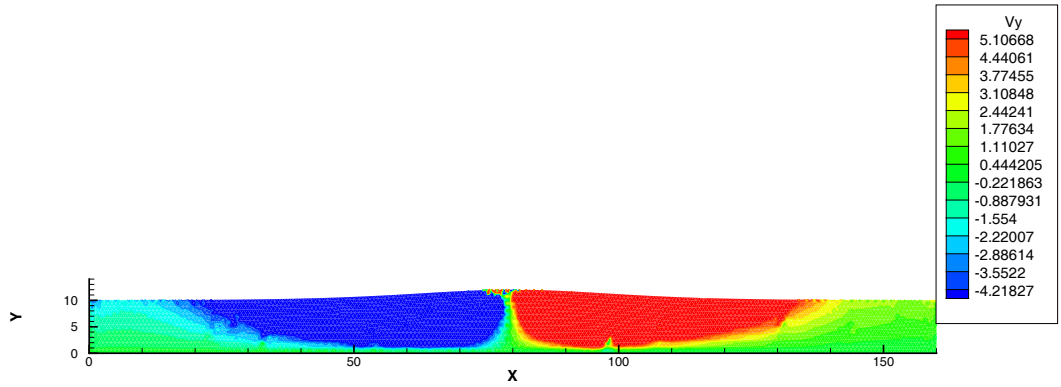


(b)

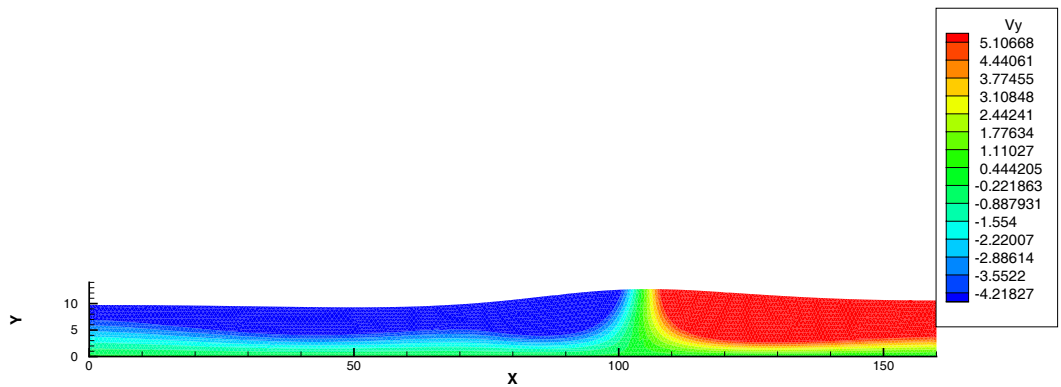


(c)

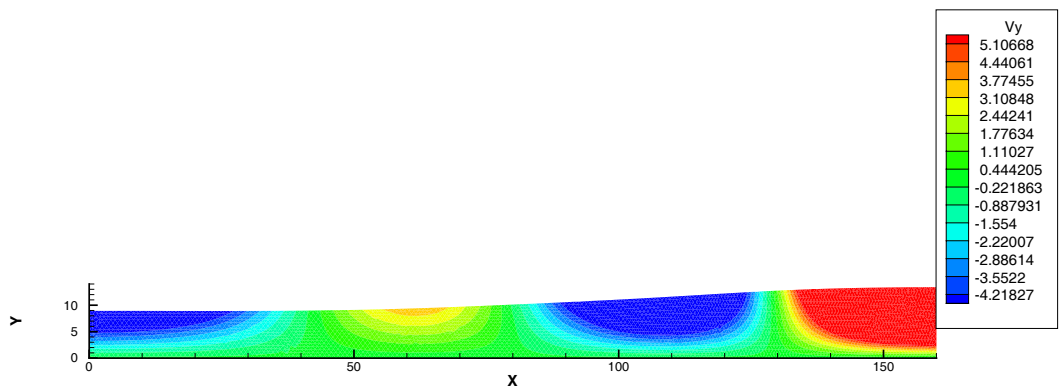
Figura 6.12: Forma α (a), distribución de los nodos (b) y campo de velocidades (c) para el paso de tiempo número 31, donde se alcanza la altura máxima $R = 4,2025$.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.13: Campo de velocidades en los pasos 1, 15 y 31 de la simulación.

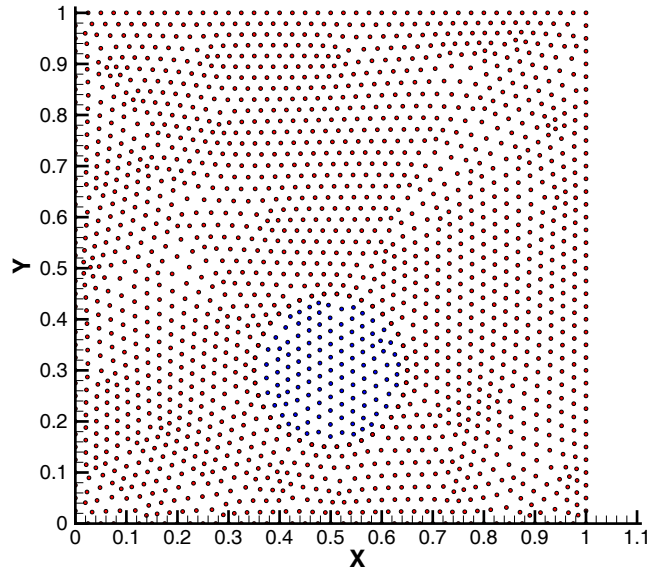


Figura 6.14: Geometría y nube de nodos para el problema de la burbuja inmersa en un fluido viscoso.

(como se describe en PAREDES [2003]).

El uso de formas α en dominios con dos materiales se describe en detalle en CUETO ET AL. [2002] y, por tanto, se remite al lector interesado a dicha referencia. A grandes rasgos, podría decirse que el uso de esta técnica en flujos bifásicos exige realizar dos formas α , con α no necesariamente igual para ambas regiones, y determinar los posibles solapes entre las regiones en las zonas próximas a la interfaz. Esto último podría realizarse, por ejemplo, mediante técnicas de visibilidad como las propuestas por YVONNET ET AL. [2003a].

En este caso se ha considerado un dominio de dimensiones 1×1 , en cuyo seno se incluye una burbuja circular de radio 0,15. La geometría del dominio, junto con la discretización efectuada, formada por 1838 nodos, se muestra en la figura 6.14.

Las características de ambos fluidos son: para el fluido de la burbuja se tomó una viscosidad $\mu_1 = 2,0e - 6$ y un peso específico $\rho_1 = 1,2e - 4$. Para el fluido circundante la viscosidad tomada fue $\mu_2 = 2,0e - 3$ y $\rho_2 = 1,0e - 3$. Ambos fluidos parten inicialmente del reposo y se dejan evolucionar durante 220 pasos de 0,0001 segundos.

La evolución de ambas fases se muestra en la figura 6.15(a) a (d).

La forma descrita por la burbuja es la obtenida en otros trabajos similares,

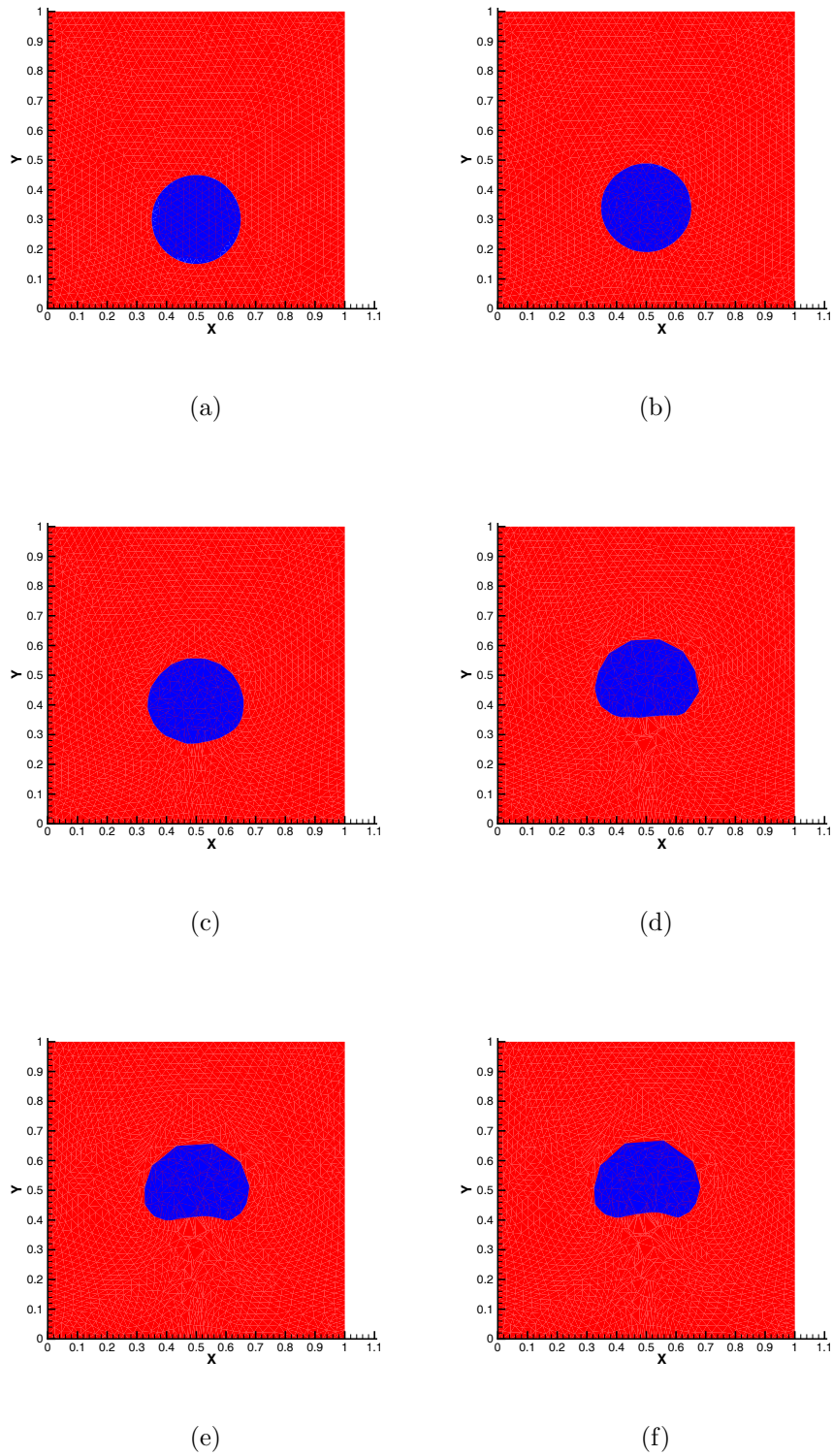


Figura 6.15: Evolución de la burbuja en el seno de un fluido viscoso. Instantes de tiempo 1 (a), 50 (b), 100 (c), 150 (d), 200 (e) y 220 (f).

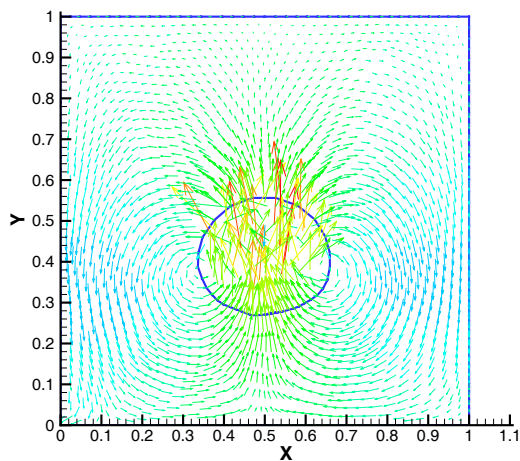
como por ejemplo CHESA Y BELYTSCHKO [2003], para condiciones similares de viscosidad relativa entre los fluidos. El campo de velocidades en un instante intermedio de la simulación se muestra en la figura 6.16. Debe destacarse en este caso que el campo de velocidades en la burbuja aparece algo distorsionado debido a la inestabilidad que presenta el algoritmo para viscosidad muy baja. En este caso se acentúa el carácter hiperbólico de las ecuaciones de la dinámica de fluidos (6.2.15)-(6.2.16)

También debe notarse que el propio movimiento de los nodos, partiendo de la parte superior de la burbuja y fluyendo hacia la parte inferior, provoca que la discretización de la zona superior de la geometría de la burbuja pierda calidad conforme avanza la simulación (véase por ejemplo la figura 6.17). Con todo, este problema puede resolverse fácilmente incrementando el número de nodos empleados en la simulación o bien mediante un refinamiento adaptativo.

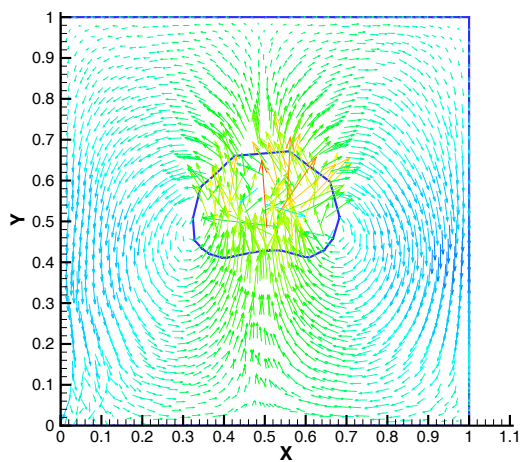
6.7 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una metodología Lagrangiana actualizada para la simulación de la Dinámica de Fluidos cuya principal ventaja es su sencillez. El algoritmo descrito está basado en el uso del método de las características y un esquema explícito. Este tipo de algoritmos presenta una problemática clara, derivada del uso de algoritmos explícitos, por un lado, y del uso del método de las características, por otro. Como se ha visto en el ejemplo anterior, cuando la viscosidad del fluido se acerca al límite no viscoso aparecen ciertas inestabilidades en el resultado. Sin embargo, la técnica presentada se muestra robusta para valores de viscosidad no necesariamente muy altos, como pueden ser los necesarios para la simulación del colapso de la columna de agua.

Con todo, el algoritmo presentado explota hasta el límite las características del método de los elementos naturales y su carácter de método sin malla. Se ha obtenido, pues, un algoritmo muy sencillo para la simulación de la Dinámica de Fluidos que se muestra robusto para un gran número de aplicaciones y que aprovecha las características de los métodos sin malla que permiten realizar simulaciones lagrangianas en un campo en el que tradicionalmente han dominado las técnicas eulerianas.



(a)



(b)

Figura 6.16: Campo de velocidades en los pasos 100 y 220.

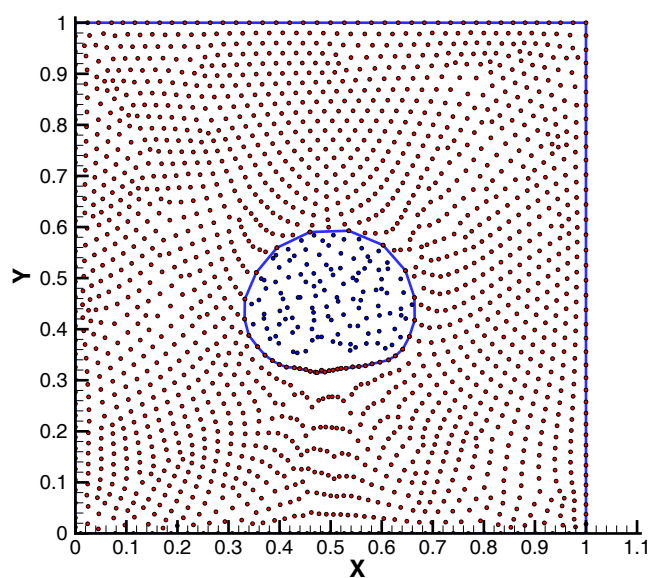


Figura 6.17: Configuración de la nube de puntos en el paso 125.

CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

7.1 Resumen del trabajo realizado

La juventud de los métodos sin malla hace que persistan desde su origen algunos problemas que aún no han sido totalmente solventados. Uno de ellos, quizá el que ha recibido mayor atención, es el de la imposición de condiciones esenciales de contorno. El hecho de que la mayoría de los métodos sin malla utilicen funciones de forma de soporte circular impide la adecuada imposición de estas condiciones, máxime cuando las técnicas empleadas son a menudo aproximantes en vez de interpolantes. En el caso del *MEN*, este problema quedó definitivamente solucionado en CUETO ET AL. [2000] y en otros trabajos posteriores como CUETO ET AL. [2003a] ó YVONNET ET AL. [2003c].

Otro de los grandes problemas de los métodos sin malla es la pérdida de exactitud derivada de los errores en la integración numérica. Uno de los más importantes avances en este sentido es la técnica de “integración nodal estabilizada” de CHEN ET AL. [2001a], que se aplicó originalmente al *RKPM*. En esta tesis se ha estudiado la viabilidad de su uso en el contexto del *MEN*, con buenos resultados, como se ha visto.

En la simulación de medios incompresibles, como pueden ser muchos fluidos, el

desarrollo de aproximaciones que no sufran bloqueo numérico es una tarea primordial. Este ha sido otro de los objetivos de esta tesis, concretamente en su aplicación al *MEN*.

Finalmente, el desarrollo de formulaciones Lagrangianas que permitan tratar el problema de la Dinámica de Fluidos es otro tema que, después de la irrupción de los métodos sin malla, aparecen como una nueva posibilidad muy atractiva.

Se ha partido inicialmente del trabajo desarrollado por Elías Cueto en su tesis doctoral, titulada “El Método de los Elementos Naturales basado en formas α : Aplicación a la simulación de la remodelación interna de fracturas de cadera con sistema Éxeter” (CUETO [2001]), donde se establecen las bases del método de los Elementos Naturales basados en formas α y su aplicación a la Elastostática lineal. Tomando como base dicho modelo se ha realizado inicialmente un breve resumen de los distintos métodos sin malla existentes en la literatura y se ha establecido la base matemática que envuelve a dichos métodos.

La técnica de simulación numérica más desarrollada y más popular es sin ningún lugar a dudas el método de los Elementos Finitos. Sin embargo existen distintos problemas donde estos métodos no ofrecen resultados con la deseada precisión, o bien presentan un elevado coste en la construcción de la discretización del dominio necesaria para su resolución, debido a la complejidad de éste. Además, el desarrollo actual de malladores automáticos es un campo abierto en la investigación sobre todo en dominios tridimensionales. La simulación de procesos que presentan grandes deformaciones y grandes desplazamientos harían necesario un remallado continuo con la utilización de la técnica de Elementos Finitos.

Con todo esto, el desarrollo y utilización de nuevas técnicas que ofrezcan nuevas prestaciones allí donde el método de los Elementos Finitos demuestra una clara debilidad parece coherente. Los métodos sin malla conforman una familia de métodos creados bajo esta filosofía, además de estar desarrollados igualmente bajo la característica de no necesitar una malla computacional para realizar la simulación numérica. Sin embargo, como suele suceder en estos casos, aparecen carencias o problemas derivados del uso de dichos métodos. Cabe destacar de la mayoría de ellos la mala aproximación de las condiciones esenciales de contorno, o condiciones Dirichlet, debido al carácter no interpolante (sino aproximante) de las funciones de forma de estos métodos. Relacionado con esto, la aproximación en dominios no convexos o formados por varios materiales necesita de técnicas especiales con objeto de asegurar la conformidad de los métodos.

En los últimos años se ha venido desarrollando un método sin malla que, siguiendo con la filosofía de esta clase de métodos, viene a paliar algunas de las

deficiencias que aparecen en dichos métodos. Este método se denomina método de los Elementos Naturales (*MEN*). Es estrictamente interpolante, con lo cual su formulación e imposición de condiciones de contorno e interfaz es muy similar a la de los Elementos Finitos. Si bien este método no resuelve todos los problemas que plantean inicialmente los métodos sin malla, entre los que destaca claramente la necesidad de desarrollar cuadraturas numéricas que disminuyan los errores debidos a la integración numérica, supone un paso importante hacia la construcción de una alternativa eficiente a la técnica de Elementos Finitos allí donde éstos disminuyen su precisión. Así, uno de los aspectos que se tratan en esta tesis ha sido el de desarrollar nuevas técnicas de integración numérica aplicadas al método de los Elementos Naturales. Se ha observado cómo el uso de una técnica de integración nodal estabilizada propuesta inicialmente por CHEN ET AL. [2001a] y convenientemente aplicada al *MEN* ofrece resultados altamente satisfactorios siendo además una técnica muy apropiada para el uso de una aproximación mediante Elementos Naturales debido a la naturaleza de la construcción de éstos, ya que están basados en la construcción del Diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay, compartiendo así la misma filosofía en la construcción. La extensión de la aproximación a problemas de tres dimensiones ofrece igualmente excelentes resultados, dejando de manifiesto la capacidad del método como alternativa clara al uso generalizado de Elementos Finitos en ciertos problemas.

En el caso de la simulación de medios incompresibles y siguiendo la misma filosofía comentada en los párrafos anteriores, se ha desarrollado también una mejora del método de los Elementos Naturales aprovechando el paradigma de la partición de la unidad, para establecer enriquecimientos de las aproximaciones mixtas que superen el bloqueo volumétrico que presentan usualmente las técnicas de Elementos Finitos y de Elementos Naturales en sus versiones estándar. Se han presentado diversos algoritmos que permiten simular con garantías dichos problemas. La verificación de la condición *LBB* se ha probado numéricamente, mediante un test ampliamente generalizado y debido a CHAPELLE Y BATHE [1993].

El último capítulo se dedica a una aplicación del método a la dinámica de fluidos. La técnica de Elementos Naturales, bajo una filosofía Lagrangiana y basada en el método de las características, se comporta de una forma fiable en este tipo de simulaciones. De nuevo, en este tipo de problemas, el *MEN* se muestra como una alternativa prometedora al *MEF*.

7.2 Conclusiones

La conclusión más importante que se obtiene del desarrollo de esta tesis doctoral es que el método de los Elementos Naturales constituye una alternativa atractiva al método de los Elementos Finitos en la simulación en determinados casos como los que se han comentado en la sección anterior. Se ha demostrado que el *MEN* es una herramienta útil en simulaciones de medios incompresibles así como en problemas derivados de la dinámica de fluidos, donde se ha presentado una novedosa técnica de aproximación, ya no solo por la filosofía empleada (se ha empleado un punto de vista Lagrangiano) sino por la combinación con el método de las características, que ofrece propiedades muy atractivas para la técnica descrita por el *MEN*. Se han obtenido resultados numéricos que así lo atestiguan.

Cabe destacar a su vez la alta precisión de la técnica de integración nodal estabilizada aplicada al método de los Elementos Naturales, y su extensión a los casos tridimensionales, siendo una filosofía totalmente nodal, sin necesidad de recurrir a una malla computacional de fondo a la hora de integrar.

7.3 Aportaciones originales

Durante el desarrollo de esta tesis se han llevado a cabo algunas aportaciones que se pueden resumir como sigue:

- Se ha demostrado que el uso de una técnica de integración nodal estabilizada aplicada al método de los Elementos Naturales constituye una posibilidad atractiva ya que mejora notablemente los resultados que ofrece el método en sus versiones iniciales. Estas investigaciones han dado como fruto, la publicación de diversos artículos en revistas y congresos especializados, como GONZÁLEZ ET AL. [2003e] o como LAGUARDIA ET AL. [2002] ó GONZÁLEZ ET AL. [2003c].
- Se ha realizado también un estudio en profundidad del comportamiento del *MEN* en la simulación de medios incompresibles, así como el desarrollo de formulaciones enriquecidas que permiten asegurar la ausencia de fenómenos de bloqueo numérico. Las aportaciones más relevantes en este campo se han publicado en GONZÁLEZ ET AL. [2003d] GONZÁLEZ ET AL. [2003b] GONZÁLEZ ET AL. [2003a].

- Por último, se ha presentado una estrategia de análisis de dinámica de fluidos bajo una perspectiva Lagrangiana. El *MEN* es un método que parece ser especialmente apropiado para este tipo de enfoques. Se observa cómo la distorsión computacional no afecta a la exactitud de los resultados, aunque —como es el caso— no se efectúen remallados. También en este aspecto se han producido ya algunas publicaciones, como GONZÁLEZ ET AL. [2003a].

7.4 Líneas de desarrollo futuro

Aunque se han desarrollado distintos aspectos que el método de los Elementos Naturales dejaba abiertos a su mejora (integración numérica) o a su ampliación (desarrollo de formulaciones mixtas enriquecidas), quedan aún abiertas varias líneas de investigación.

Por lo que se refiere al coste computacional, queda abierta una línea de investigación atractiva para disminuir ciertos aspectos de la técnica de búsqueda de los vecinos naturales que emplea el método, siendo muy atractiva la existencia de filosofías basadas en el uso de quadtrees (LAGUARDIA ET AL. [2002]) o de octrees (para casos tridimensionales) que recientemente se están aplicando a dichos métodos.

La filosofía Lagrangiana que el *MEN* permite adoptar abre las puertas a su uso en la simulación de la interacción entre fluidos y estructuras, por ejemplo. Tradicionalmente, este tipo de simulaciones se realizan adoptando una perspectiva Euleriana para el fluido y Lagrangiana para el sólido. Este enfoque obliga, como es sabido, al uso de técnicas de estabilización en el fluido.

En todo caso, es obvio que el desarrollo de los métodos sin malla no se ha terminado y quizá se pueda llegar a la creación de nuevas técnicas de aproximación o interpolación de datos que permitan solventar los problemas que se han comentado en su aplicación al método de Galerkin.

NOMENCLATURA

Los símbolos de esta tesis se han escogido de manera acorde con la mayoría de los textos sobre la materia. Así, siguiendo a MARS DEN Y HUGHES [1994], se han utilizado caracteres itálicos para representar escalares, letra itálica o griega negrita para representar vectores y tensores de segundo orden y letra *sans-serif* negrita (por ejemplo, **C**) para representar tensores de cuarto orden. Los funcionales se representan con estilo caligráfico (esto es, \mathcal{E}). Se presenta a continuación una lista completa de los símbolos usados.

A.1 Símbolos

Símbolo	Descripción
1	Tensor identidad de segundo orden (Delta de Kronecker, δ_{ij})
(\cdot, \cdot)	Producto interno
$(\cdot, \cdot)_y$	Producto interno ponderado dependiente del punto y
$ \cdot $	Medida de Lebesgue
$\ \cdot\ $	Norma
$\ \cdot\ _*$	Norma dual
$\ \cdot\ _{m,\Omega}$	Norma en $H^m(\Omega)$

Símbolo	Descripción
α	Constante de coercitividad, parámetro de las formas α
\mathcal{A}	Conjunto de puntos.
$A(\mathbf{x})$	Área de la celda de Voronoi del punto \mathbf{x}
a	Velocidad característica
b	α -esfera o esfera de radio α
β_{jI}	Incógnitas en el método de Partición de la Unidad
$\mathbf{B}(\mathbf{x}, r)$	Bola de centro \mathbf{x} y radio r
\mathbf{b}	Vector de fuerzas volumétricas
$b(\cdot, \cdot)$	Forma bilineal
\mathbf{B}_I	Matriz de derivadas de funciones de forma
$\tilde{\mathbf{B}}$	Matriz de gradientes suavizada
β_h	Valor numérico de la condición <i>inf-sup</i>
\mathcal{C}_0	Espacio de funciones continuas con soporte compacto
c.t.p.	en Casi Todo Punto
\mathcal{C}^∞	Espacio de funciones continuas indefinidamente derivables
$CH(\mathcal{A})$	Envoltura convexa del conjunto de puntos \mathcal{A}
$conv(\mathcal{A})$	Envoltura convexa del conjunto de puntos \mathcal{A}
\mathcal{C}	Tensor de comportamiento de material
\mathcal{C}	Complejo simplicial
\mathcal{C}_α	Complejo simplicial (α -complejo)
(C_x, C_y)	Coordenadas de un circuncentro
C_h	Constante de estabilidad
δ_{nm}	Delta de Kronecker
\mathcal{D}	Espacio de funciones indefinidamente derivables y con soporte compacto
D_A	Dominio del operador A
D^i	Operador diferencial
ΔV_I	Volumen que rodea al nodo I
d_I	Separación nodal
$Del(\mathcal{A})$	Triangulación de Delaunay del conjunto \mathcal{A}
$d(\cdot, \cdot)$	Distancia Euclídea
Δ	Operador de Laplace
$\partial\Omega$	Frontera del dominio Ω
∂b	Esfera que limita b

Símbolo	Descripción
ε	Tensor de pequeñas deformaciones
E	Módulo de Young
e_I	Error nodal
$\mathcal{F}_N^{k,p}$	Familia de funciones de aproximación en el método de nubes h - p
\mathcal{F}	Conjunto de índices
\mathbf{f}^{ext}	Vector de fuerzas exteriores
$F_{k,\alpha}$	Conjunto de k -simplex α -expuestos
Φ_I	Función de forma de un método sin malla asociada al nodo I
G	Función de aproximación global
∇	Operador gradiente
∇^s	Parte simétrica del operador gradiente
g	Gravedad
Γ	Frontera del dominio
Γ_u	Frontera esencial
H^m	Espacio de Sobolev $W^{m,2}$
$h(A, B)$	Semiplano que contiene al punto A
\mathbf{I}	Matriz identidad
I_z	Momento de inercia
$\kappa(\cdot)$	Medida de Lebesgue
\mathbf{K}	Matriz de Rigidez
κ	Constante de Kolosov
L^1	Espacio de funciones integrables
L^p	Espacio de funciones $ f ^p$ integrables
L^∞	Espacio de funciones acotadas en casi todo punto
L_y	Aproximación local por mínimos cuadrados ponderados
$l(\cdot)$	Forma lineal
λ_k	k -ésimo valor propio
λ	Coefficiente de Lamé
Λ_i	Soporte del nodo i
M	Constante de continuidad
M_i	Momento de la aproximación
μ	Módulo de cortante
NP	Número de partículas o nodos

Símbolo	Descripción
\mathbf{n}	Vector normal
ν	Coefficiente de Poisson
n_q	Número de puntos de cuadratura
NIT	Número de puntos de integración
N_{nb}	Número de nodos en la frontera natural
n_p	Número de grados de libertad en presiones
n_u	Número de grados de libertad en desplazamientos
Ω	Dominio del problema
Ω_i	Recubrimiento abierto de un dominio
Θ	Funcionales que proporcionan el circuncentro de un triángulo
ω_i	Coefficientes de peso de los puntos de cuadratura
P	Operador proyección
Π	Proyección ortogonal
p	Presión hidrostática
\mathcal{Q}	Conjunto de nodos situados dentro del dominio de influencia de un punto
$\rho(\mathbf{x})$	Densidad en el punto \mathbf{x}
$R_{\mathbf{X}}$	Dominio material
$R_{\mathbf{x}}$	Dominio espacial
ρ	Densidad
S_2^k	Espacio métrico
S	Interpolante de Shepard
sop	Soporte de una función
$\mathcal{S}(\mathbf{x}, r)$	Superficie de de la esfera de centro \mathbf{x} y radio r
σ_T	símplex
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensiones de Cauchy
S	Superficie cerrada de una celda de Voronoi
\mathcal{S}_α	Forma- α
Σ_i	Plano
$S_{a \rightarrow b}$	Segmento situado entre a y b
σ^C	Vector de tensión constante
$s(\cdot)$	Forma lineal
T_I	Celda de Voronoi asociada a I

Símbolo	Descripción
T_{IJ}	Celda de Voronoi de segundo orden
t_i	Triángulo
T_I^C	Celda de Voronoi restringida
t	Tiempo
τ	Tiempo
\mathbf{u}	Vector de desplazamientos
$Vor(\mathcal{A})$	Diagrama de Voronoi de \mathcal{A}
V	Volumen de una celda de Voronoi
V_T	Volumen material
$W^{m,p}$	Espacio de Sobolev
W	Función núcleo
W_I	Función radial con soporte compacto sobre una esfera centrada en el nodo I
ξ_i	Coordenadas de los puntos de cuadratura
\mathbf{X}	Coordenadas materiales
\mathbf{x}	Coordenadas espaciales
Ξ	Coordenadas de los puntos de cuadratura en el paso de tiempo anterior

A.2 Operadores

Se incluyen a continuación los operadores utilizados a lo largo de esta tesis, generalmente escritos en notación tensorial *simbólica* y su equivalencia en notación indicial, supuesto que se trabaja en coordenadas cartesianas.

Producto interno:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad a_i b_i$$

Doble producto interno o contracción tensorial:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} & \quad \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\ \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} & \quad C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \mathbf{C} : \mathbf{D} & \quad C_{ijkl} D_{klmn} \end{aligned}$$

Producto tensorial:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} & a_i b_j \\ \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} & \sigma_{ij} \varepsilon_{kl}\end{aligned}$$

Gradiente:

$$\begin{aligned}\nabla \psi & \psi_{,i} \\ \nabla \boldsymbol{\sigma} & \sigma_{ij,j}\end{aligned}$$

Gradiente simétrico:

$$\nabla^s \mathbf{u} \quad u_{(i,j)} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Parte simétrica:

$$\text{sym}(\mathbf{A}) \quad \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$$

Traza:

$$\text{tr} \mathbf{H} \quad H_{ii}$$



BIBLIOGRAFÍA

- D. ARNOLD [1990]. Mixed finite element methods for elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **82**: 281–300.
- D. ARNOLD, F. BREZZI Y M. FORTIN [1984]. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo* **21**: 337–344.
- S. ATLURI, H. G. KIM Y J. Y. CHO [1999]. A critical assesment of the truly Meshless Local Petrov-Galerkin and Local Boundary Integral Equation methods. *Computational Mechanics* **24**: 348–372.
- S. ATLURI Y T. ZHU [2000]. New concepts in meshless methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **47**: 537–556.
- I. BABUŠKA [1973]. The Finite Element Method with Lagrange multipliers. *Numerische Mathematik* **20**: 179–192.
- I. BABUŠKA Y A. AZIZ [1976]. On the Angle Condition in the Finite Element Method. *SIAM J. Numer. Anal.* **13**: 214–227.
- I. BABUŠKA Y J. M. MELENK [1996]. The partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* **4**: 289–314.

- I. BABUŠKA Y J. M. MELENK [1997]. The partition of Unity Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **40**: 727–758.
- K. J. BATHE [1996]. *Finite Element procedures*. Prentice-Hall.
- V. V. BELIKOV, V. D. IVANKOV, V. K. KONTOROVICH, S. A. KORYTNIK Y A. Y. SEMENOV [1997]. The non-Sibsonian interpolation: A new method of interpolation of the values of a function on arbitrary set of points. *Computational Mathematics and Mathematical Physics* **37(1)**: 9–15.
- V. V. BELIKOV Y A. Y. SEMENOV [1998]. *Non-Sibsonian interpolation on arbitrary system of points in Euclidean space and adaptive generating isolines algorithm..* M. Cross, B.K. Soni, J.F. Thompson, J. Hauser, and P.R. Eiseman (Eds.), Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations, University of Greenwich, London, U.K.
- T. BELYTSCHKO, Y. KONGRAUZ, M. FLEMING, D. ORGAN Y W. K. LIU [1995]. Smoothing and accelerated computations in the Element Free Galerkin method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- T. BELYTSCHKO, Y. KRONGAUZ, D. ORGAN, M. FLEMING Y P. KRYSL [1998a]. Meshless Methods: An Overview and Recent Developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**: 3–47.
- T. BELYTSCHKO, W. K. LIU Y M. SINGER [1998b]. On adaptivity and error criteria for meshless methods. *New advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics. P. Ladeveze and J. T. Oden, Eds..*
- T. BELYTSCHKO, Y. Y. LU Y L. GU [1993]. Crack Propagation by Element Free Galerkin Methods. *Advanced Computational Methods for Material Modelling AMD-Vol 180*: 268–.
- T. BELYTSCHKO, Y. Y. LU Y L. GU [1994]. Element-Free Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **37**: 229–256.
- P. BERCZIK [2000]. Modeling the star formation in galaxies using the chemodynamical sph code. *Astronomy and Astrophysics* **360**: 76–84.
- J. BONET Y T.-S. LOK [1999]. Variational and momentum preservation aspects of Smooth Particle Hydrodynamic formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **180**: 97–115.

- J. BRAUN Y M. SAMBRIDGE [1995]. A Numerical Method for Solving Partial Differential Equations on Highly Irregular Evolving Grids. *Nature* **376**: 655–660.
- J. BRAUN, M. SAMBRIDGE Y H. MCQUEEN [1995]. Geophysical Parametrization and Interpolation of Irregular data using Natural Neighbours. *Geophysical Journal International* **122**: 837–857.
- F. BREZZI [1974]. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers. *Revue Française d'Automatique Informatique Recherche Operationelle, Analyse Numérique* **8**: 129–151.
- D. BUECHE, N. SUKUMAR Y B. MORAN [2000]. Dispersive Properties of the Natural Element Method. *Computational Mechanics* **25(2/3)**: 207–219.
- D. CHAPELLE Y K. J. BATHE [1993]. The inf-sup Test. *Computers and Structures* **47(4-5)**: 537–545.
- J.-S. CHEN, C.-T. WU, S. YOON Y Y. YOU [2001a]. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **50**: 435–466.
- J.-S. CHEN, C.-T. WU, S. YOON Y Y. YOU [2001b]. Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* —: Accepted for publication.
- J. CHESSA Y T. BELYTSCHKO [2003]. An enriched finite element method and level sets for axisymmetric two-phase flow with surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **58**: 2041–2064.
- E. CUETO. *El Método de los Elementos Naturales basado en formas α : Aplicación a la simulación de la remodelación interna de fracturas de cadera con sistema Éxeter*. Tesis Doctoral Universidad de Zaragoza Zaragoza, España [2001].
- E. CUETO, B. CALVO Y M. DOBLARÉ [2002]. Modeling three-dimensional piecewise homogeneous domains using the α -shape based Natural Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **54 (6)**: 871–897.
- E. CUETO, J. CEGOÑINO, B. CALVO Y M. DOBLARÉ [2003a]. On the imposition of essential boundary conditions in Natural Neighbour Galerkin methods. *Communications in Numerical Methods in Engineering* **19(5)**: 361–376.

- E. CUETO, M. DOBLARÉ Y L. GRACIA [2000]. Imposing essential boundary conditions in the Natural Element Method by means of density-scaled α -shapes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **49-4**: 519–546.
- E. CUETO, M. A. MARTÍNEZ Y M. DOBLARÉ [2001]. El método de los Elementos Naturales en Elasticidad compresible y cuasi-incompresible. *Boletín Técnico del Instituto de Materiales y Modelos Estructurales. Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela*, **39(3)**.
- E. CUETO, N. SUKUMAR, B. CALVO, M. A. MARTÍNEZ, J. CEGOÑINO Y M. DOBLARÉ [2003b]. Overview and recent advances in Natural Neighbour Galerkin methods. *Archives of Computational Methods in Engineering* **10(4)**: 307–384.
- S. DE Y K. J. BATHE [2000]. The method of finite spheres. *Computational Mechanics* **25**: 329–345.
- S. DE Y K. J. BATHE [2001a]. Displacement/pressure mixed interpolation in the method of finite spheres. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **51**: 275–292.
- S. DE Y K. J. BATHE [2001b]. The method of finite spheres with improved numerical integration. *Computers and Structures* **79**: 2183–2196.
- S. DE Y K. J. BATHE [2001c]. Towards an efficient meshless computational technique: the method of Finite Spheres. *Engineering Computations* **18**: 170–192.
- J. DOLBOW Y T. BELYTSCHKO [1999]. Numerical Integration of the Galerkin Weak Form in Meshfree Methods. *Computational Mechanics* **23**: 219–230.
- J. DOLBOW Y T. BELYTSCHKO [1999]. Volumetric locking in the Element Free Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **46**: 925–942.
- J. DONEA Y A. HUERTA [2003]. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley and Sons, Chichester.
- C. DUARTE Y J. T. ODEN [1996]. H-p Clouds, An h-p Meshless Method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* **12**: 673–705.

- C. A. M. DUARTE, I. BABUŠKA Y J. T. ODEN [2000]. Generalized Finite Element Methods for Three-Dimensional Structural Mechanics Problems. *Computers and Structures* **77(2)**: 215–232.
- H. EDELSBRUNNER, D. G. KIRKPATRICK Y R. SEIDEL [1983]. On the Shape of a Set of Points in the Plane. *IEEE Transactions on Information Theory* **IT-29(4)**: 551–559.
- H. EDELSBRUNNER Y E. MÜCKE [1994]. Three Dimensional Alpha Shapes. *ACM Transactions on Graphics* **13**: 43–72.
- G. FARIN [1990]. Surfaces over Dirichlet tessellations. *Computer Aided Geometric Design* **7 (1-4)**: 281–292.
- J. GARCIA-AZNAR, E. CUETO Y M. DOBLARÉ. Simulation of bone internal remodeling by means of the α -shape based Natural Element Method. En *Proceedings of the ECCOMAS Conference. Barcelona*. [2000].
- D. GONZÁLEZ, I. ALFARO, E. CUETO, M. DOBLARÉ Y F. CHINESTA. The α -shapes based Natural Element method in Solid and Fluid Mechanics. En *Lecture notes in Computational Science and Engineering* aceptado para su publicación. [2003a].
- D. GONZÁLEZ, E. CUETO, F. CHINESTA Y M. DOBLARÉ. A study on mixed approximations in Natural Neighbour Galerkin methods. En *ESAFORM Conference proceedings. Trondheim, Norway*. [2003b].
- D. GONZÁLEZ, E. CUETO Y M. DOBLARÉ. Integración numérica en métodos de Galerkin de Vecindad Natural. En *Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. CEDYA. Tarragona. España*. [2003c].
- D. GONZÁLEZ, E. CUETO Y M. DOBLARÉ [2003d]. Volumetric locking in Natural Neighbour Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **Aceptado para su publicación**.
- D. GONZÁLEZ, E. CUETO, M. A. MARTÍNEZ Y M. DOBLARÉ [2003e]. Numerical integration in Natural Neighbour Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **Aceptado para su publicación**.
- P. J. GREEN Y R. SIBSON [1978]. Computing Dirichlet tessellations in the plane. *The Computer Journal* **21**: 168–173.

- J. HADAMARD [1911]. Mouvement permanente lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* **152**: 1735–1738.
- H. HIYOSHI. *Study on Interpolation Based on Voronoi Diagrams*. Tesis Doctoral University of Tokyo Tokyo, Japan [2000].
- H. HIYOSHI Y K. SIGIHARA [1999]. Two generalisations of an interpolant based on Voronoi diagrams. *International Journal of Shape Modeling* **5(2)**: 219–231.
- J. HULTMAN Y A. PHARAYN [1999]. Hierchical, dissipative formation of elliptical galaxies: is thermal instability the key mechanism? Hydrodynamical simulations including supernova feedback multi-phase gas and metal enrichment in cdm: Structure and dynamics of elliptical galaxies. *Astronomy and Astrophysics* **347**: 769–798.
- B. IRONS Y A. RAZZAQUE. Experience with the patch test for convergence of Finite Elements. En A. K. Aziz, ed., *The mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*. Academic Press, New York [1972].
- Y. KRONGAUZ. *Application of Meshless Methods to Solid Mechanics*. Tesis Doctoral Northwestern University Evanston, IL [1996].
- J. LAGUARDIA, D. GONZÁLEZ, I. ALFARO, E. CUETO Y M. DOBLARÉ. Avances recientes en métodos Galerkin de Vecindad Natural. En *V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. Madrid, España*. [2002].
- E. V. LAITONE [1960]. The second approximation to cnoidal and solitary waves. *J. Fluid Mech.* **9**: 430–444.
- P. LANCASTER Y K. SALKAUSKAS. Curve and Surface Fitting, an Introduction. En *Academic Press. San Diego*. [1986].
- J. B. LASSERRE [1983]. An analytical expression and an algorithm for the volume of a convex polyhedron in \mathbb{R}^n . *Journal of Optimization Theory and Applications* **39(3)**: 363–377.
- W. LEE [1998]. newtonian hydrodynamics of the coalescence of black holes with neutron stars ii. Tidally locked binaries with a soft equation of state. *Monthly Notices of the royal Astronomical Society* **308**: 780–794.

- R. LEWIS, S. NAVTI Y C. TAYLOR [1997]. A Mixed Lagrangian-Eulerian Approach to Modelling Fluid Flow During Mould Filling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **25**: 931–952.
- S. LI Y W. K. LIU [2002]. Meshfree and Particle Methods and Their Applications. *Applied Mechanics Review* **55(1)**: 1–34.
- T. LISZKA [1984]. An interpolation method for an irregular net of nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **20**: 1599–1612.
- T. LISZKA Y J. ORKISZ [1980]. The difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Comp. Struct.* **11**: 83–95.
- W. K. LIU Y Y. CHEN [1995]. Wavelet and Multiple Scale Reproducing Kernel Methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **21**: 901–931.
- W. K. LIU, S. JUN, S. LI, J. ADEE Y T. BELYTSCHKO [1995]. Reproducing Kernel Particle Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **38**: 1655–1679.
- L. B. LUCY [1977]. A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis. *The Astronomical Journal* **82(12)**: 1013–1024.
- J. E. MARSDEN Y T. J. R. HUGHES [1994]. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover.
- J. MARTIN Y W. MOYCE [1952]. Part IV. an experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Phil. Tran. R. Soc. London* **244**: 312.
- M. A. MARTÍNEZ, E. CUETO, M. DOBLARÉ Y F. CHINESTA [2003]. Natural Element meshless simulation of injection processes involving short fiber suspensions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **115**: 51–78.
- J. MONAGHAN [1990]. Modelling the Universe. *Proceedings of the Astronomical Society of Australia* **18**: 233–237.
- J. J. MONAGHAN [1982]. Why particle methods work. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **3(4)**: 422–433.
- B. MORAN Y J. YOO. Meshless Methods for Life Cycle Engineering Simulation: Natural Neighbour Methods. En *Modeling and Simulation-based Life Cycle Engineering* 91–105. [2002].

- B. NAYROLES, G. TOUZOT Y P. VILLON [1992]. Generalizing the finite element method: Difuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics* **10**: 307–318.
- J. T. ODEN, C. A. M. DUARTE Y O. C. ZIENKIEWICZ [1998]. A New Cloud Based hp Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **153**: 117–126.
- J. T. ODEN Y J.Ñ. REDDY [1976]. *An introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. John Wiley and Sons, New York.
- D. ORGAN, M. FLEMING, T. TERRY Y T. BELYTSCHKO [1996]. Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency. *Computational Mechanics* **18**: 1–11.
- J. PAREDES. *Simulación numérica de algunos problemas de mecánica de fluidos con frontera libre*. Tesis Doctoral Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Santiago de Compostela, en preparación. [2003].
- S. RABIER Y M. MEDALE [2003]. Computation of Free Surface Flows with a Projection FEM in a Moving Mesh Framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **aceptado**.
- B. RAMASWAMY [1990]. Numerical Simulation of Unsteady Viscous Free Surface Flow. *Journal of Computational Physics* **90**: 396–430.
- B. RAMASWAMY Y M. KAWAHARA [1987]. Lagrangian Finite Element Analysis applied to Viscous Free Surface Fluid Flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **7**: 953–984.
- K. REKTORYS [1980]. *Variational Methods in Mathematics*. Science and Engineering, D. Reidel publishing Company.
- R. SEIDEL. Constrained Delaunay triangulations and Voronoi diagrams with obstacles. En *1978-1988 Ten Years IIG* 178–191. [1988].
- R. SIBSON [1980]. A Vector Identity for the Dirichlet Tessellation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **87**: 151–155.
- R. SIBSON. A brief description of natural neighbour interpolation. En *Interpreting Multivariate Data. V. Barnett (Editor)* 21–36. John Wiley and Sons, Chichester [1981].

- T. STROUBOULIS, K. COPPS Y I. BABUŠKA [2001]. The Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**: 4081–4193.
- N. SUKUMAR. *The Natural Element Method in Solid Mechanics*. Tesis Doctoral Northwestern University Evanston, Illinois [1998].
- N. SUKUMAR Y B. MORAN [1999]. C^1 Natural Neighbour Interpolant for Partial Differential Equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* **15(4)**: 417–447.
- N. SUKUMAR, B. MORAN Y T. BELYTSCHKO [1998]. The Natural Element Method in Solid Mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **43(5)**: 839–887.
- N. SUKUMAR, B. MORAN, A. Y. SEMENOV Y V. BELIKOV [2001]. Natural Neighbor Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **50(1)**: 1–27.
- J. W. SWEGLE, S. W. ATTAWAY, M. W. HEINSTEIN, F. J. MELLO Y D. L. HICKS [1994]. An analysis of the smoothed particle hydrodynamics. *Technical Report SAND93-2513 UC-705*.
- S. TIMOSHENKO Y J.Ñ. GOODIER [1972]. *Teoría de la Elasticidad*. Editorial Urmo.
- L. TRAVERSONI. Natural Neighbour Finite Elements. En *Intl. Conference on Hydraulic Engineering Software. Hydrosoft Proceedings* 291–297. Computational Mechanics publications [1994].
- D. WATSON [1981]. Computing the n-dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes. *The Computer Journal* **24(2)**: 162–172.
- D. WATSON [1994]. *Nngridr. An Implementation of Natural Neighbor Interpolation*. Publicado por el autor.
- G.Ñ. WELLS, L. J. SLUYS Y DE R. BORST [2002]. A p-adaptive scheme for overcoming volumetric locking during plastic flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **191**: 3153–3164.
- J. YVONNET, D. RYCKELYNCK, P. LORONG Y P. CHINESTA [2003a]. A new extension of the natural element method for non convex and discontinuos problems,

the constrained natural element method (C-NEM). *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **Aceptado para su publicación.**

J. YVONNET, D. RYCKELYNCK, P. LORONG Y P. CHINESTA [2003b]. Interpolation naturelle sur les domaines non convexes par l'utilisation du diagramme de Voronoi contraint - Méthode des éléments C-Naturels. *Revue Européenne des éléments Finis* **Aceptado para su publicación.**

J. YVONNET, D. RYCKELYNCK, P. LORONG Y P. CHINESTA [2003c]. The meshless constrained natural element method (C-NEM) for treating thermal models involving moving interfaces. **Enviado.**



ÍNDICE ALFABÉTICO

A	
adaptatividad	55
algoritmo de Lasserre	84
algoritmo de Watson	82
aproximación	137
~ mixta	145
aproximante	73
B	
base extrínseca	54
base Hilbertiana	14
bloqueo volumétrico	133
C	
campo de deformaciones suavizado ..	110
cociente de Rayleigh	147
condición Ínfimo-Supremo	<i>véase</i>
condición LBB	
condición de restricción de integración	109
condición inf-sup .. <i>véase</i> condición LBB	
condición LBB	136, 139 , 144
~ test numérico	145, 157
condiciones de contorno	71
~ esenciales	34, 43, 86, 90
consistencia	43, 74, 75, 79
continuidad	74
contorno Lipschiziano	173
convergencia	137
convergencia débil	12 , 13
convergencia fuerte	12 , 13
criterio de la parcela	<i>véase</i> patch test
criterio de visibilidad	98
criterio del circuncírculo vacío	64
CST	79
D	
Delta de Kronecker	34
~ propiedad de la	43
derivabilidad	74
derivada generalizada	25
derivada material	168
descripción ALE	166
descripción Euleriana	166
descripción Lagrangiana	166

diagrama de Voronoi 64, **65**
 ~ celda de Voronoi 65, 122
 ~ celda de Voronoi de segundo orden
 65
 ~ restringido **96**
 ~ celda de 98
 dominio espacial 166
 dominio material 166

E

ecuación de Poisson 25
 EFGM 4, **46**
 elastostática 69
 envoltura convexa 65
 espacio completo **11**
 espacio de Banach **12**
 espacio de Hilbert **11**
 espacio de Sobolev **16**
 espacio pre-Hilbert 11
 ~ de Cauchy 11
 espacio separable 16
 espacios de aproximación local ... 54, 149
 estabilidad 74, 137

F

forma- α **88**
 forma bilineal 10
 ~ coercitiva **17**, 19, 140
 formulación débil 69, 142
 formulación mixta 133, **136**
 formulación no estándar 133, 134
 formulación variacional característica 178
 función de distribución 111
 función de forma 68, **82**
 funciones estrictamente interpolantes . 72

G

Gaussiana 29

H

hipótesis de elipticidad 17

I

IC *véase* condición de restricción de
 integración
 igualdad de Bessel-Parseval 15
 incompresibilidad 141, 173
 inconsistencia 33
 inestabilidad 33
 integración numérica 44, 101
 ~ error 102
 ~ nodal estabilizada 108
 interpolación 67
 ~ no-sibsoniana 67, 75
 interpolación Sibson 152
 interpolación Thiessen 152
 interpolante de Shephard 39, 60

L

línea característica 175
 Lema de Cèa 19
 Ley de Stokes 173

M

método de esferas finitas **59**
 ~ construcción de la aproximación 59
 método de Galerkin 10, **22**
 ~ Bubnov-Galerkin 24
 ~ Petrov-Galerkin 24, 71
 método de las características 175
 método nubes h-p 4, **55**
 ~ construcción de la aproximación 55
 métodos sin malla **9**, 28
 ~ clasificación de 9
 ~ propiedades de 9
 MED 4, **45**
 ~ construcción de la aproximación 45
 MEF 1, 9, 27
 MEN 2, 5, **63**
 ~ MEN- α 92
 ~ MEN-restringido 96
 ~ construcción de la aproximación 77

MLPG..... 57
 MMCM..... 4, 34
 ~ construcción de la aproximación 35
 modos espurios
 ~ de deformación 33
 ~ de presión 147
 MPU..... 50, 149
 ~ construcción de la aproximación 54

N

núcleo..... 28

P

parámetros de Lamé 142
 partición de la unidad 51, 73
 patch test 106
 ~ tridimensional 121
 presión 142
 problema variacional 16
 ~ abstracto 16
 ~ elíptico 18
 ~ mixto abstracto 136
 problemas de contorno elípticos 18
 producto escalar 11
 puntos de tensión 33

R

RKPM..... 4, 48
 ~ construcción de la aproximación 48

S

símplex 67, 89
 ~ α complejo 90
 ~ α expuesto 89
 solución débil 24, 26
 solución fuerte 27
 soporte 67
 SPH..... 4, 28
 ~ construcción de la aproximación 28
 subespacio denso 13
 supremo esencial 12

T

tensor
 ~ de comportamiento del material 70
 ~ de pequeñas deformaciones ... 142
 ~ de pequeñas deformaciones de Cauchy
 70
 ~ de tensiones desviadoras 173
 ~ de tensiones en un fluido Newtoniano 172
 ~ de velocidad de deformación .. 142
 Teorema de Lax-Milgram 17
 Teorema de transporte de Reynolds . 170
 Teorema general de convergencia 20
 teselación de Dirichlet *véase* diagrama de
 Voronoi
 traza 25
 triangulación de Delaunay 64

V

vecinos naturales 64
 ~ coordenadas de 64, 66
 ~ enriquecidos 151
 velocidad de convección 177
 viscosidad 174

